UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL
5852-171

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

56. BAND, 1. HEFT
(AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1952)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1952

Mh. Math.
A1
877
56-1

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

56. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Mönnig, P. Über Integralgleichungen mit unsymmetrischem Polynomkern bei längs der Hauptdiagonale sich änderndem Bildungsgesetz 1

Burau, W. Geometrische Bemerkungen zu einigen Grundfragen der algebraischen Geometrie in idealtheoretischer Begründung 16

Inzinger, R. Eine projektiv invariante Konfiguration von Linienelementen dritter Ordnung 38

Gastinger, W. Über die untere Grenze der positiven Werte reeller quadratischer Formen 49

Hofreiter, N. Über die Approximation von komplexen Zahlen durch Zahlen des Körpers $K(i)$ 61

Buchbesprechungen 75

Über Integralgleichungen mit unsymmetrischem Polynomkern bei längs der Hauptdiagonale sich änderndem Bildungsgesetz.

Von

Paul Mönnig, Aachen

(Eingelangt am 17. April 1951.)

Diese Arbeit ist eine verkürzte Wiedergabe meiner am 1. 7. 48 an der T. H. Braunschweig eingereichten Dissertation. Ich danke an dieser Stelle insbesondere den Herren Prof. Dr. *R. Iglisch* und Prof. Dr. *G. L. Tantz* für das große Interesse und die zahlreichen Anregungen, womit sie zur Förderung dieser Arbeit beigetragen haben.

I. Charakterisierung des Problems.

Wir betrachten die Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x), \tag{1}$$

wobei der Kern von der speziellen Gestalt

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(\xi) \text{ für } x \leqq \xi, \\ \sum_{\nu=1}^{\bar{n}} \bar{\varphi}_\nu(x)\, \bar{\psi}_\nu(\xi) \text{ für } x > \xi \end{cases} \tag{2}$$

sein soll. Vorausgesetzt wird, daß die Funktionen $\varphi_\nu(x)$, $\bar{\varphi}_\nu(x)$, $\psi_\nu(\xi)$, $\bar{\psi}_\nu(\xi)$, $f(x)$ im Definitionsintervall $< a; b >$, $(-\infty < a < b < +\infty)$ gleichmäßig beschränkt und integrabel sind.

Es wird ein aus der besonderen Struktur des Kernes sich entwickelndes Verfahren zur Lösung der inhomogenen und homogenen Integralgleichung angegeben[1].

[1] Die Voraussetzungen des Verfahrens können noch verallgemeinert werden, indem etwa für die Kernfunktionen gewisse integrable Singularitäten zugelassen

II. Die Berechnung der Resolante.

Ist $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ der lösende Kern zu $K(x, \xi)$, so gilt nach der allgemeinen Integralgleichungstheorie die Definitionsgleichung (siehe [2], S. 519)

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, \varrho, \lambda) K(\varrho, \xi) \, d\varrho. \tag{3}$$

$\Gamma(x, \xi, \lambda)$ ist eine in λ meromorphe Funktion. Sie ist nach der Fredholmschen Theorie dargestellt als Quotient zweier in λ ganzer transzendenter Funktionen:

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \frac{D(x, \xi, \lambda)}{D(\lambda)}. \tag{4}$$

Es besteht die Gleichung (siehe [2], S. 516)

$$\frac{d D(\lambda)}{d\lambda} = -\int_a^b D(x, x, \lambda) \, dx. \tag{5}$$

Außerdem ist ein in (4) noch willkürlicher Normierungsfaktor festgelegt durch

$$D(o) = 1. \tag{6}$$

Um nun für den speziellen Kern $K(x, \xi)$ aus (2) die Resolvente $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ anschreiben zu können, haben wir zunächst einige Vorbereitungen zu treffen. Wir subtrahieren in (2) die beiden Bilinearausdrücke, durch die $K(x, \xi)$ definiert ist, und setzen

$$V(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\overline{n}} \overline{\varphi}_\nu(x) \, \overline{\psi}_\nu(\xi) - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \, \psi_\nu(\xi). \tag{7}$$

Mit dieser neuen Funktion $V(x, \xi)$ als Kern lösen wir dann die Volterraschen Integralgleichungen

---

werden. An Stelle des Polynomkernes 2) kann man einen Doppelintegralkern

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \iint_{ii}^{kk} c(s, t) \, \varphi(x, s) \, \psi(\xi, t) \, ds \, dt & \text{für} \quad x \leqq \xi, \\ \iint_{ii}^{kk} \bar{c}(s, t) \, \overline{\varphi}(x, s) \, \overline{\psi}(\xi, t) \, ds \, dt & \text{für} \quad x > \xi \end{cases}$$

annehmen, wobei die Ermittlung der Resolante und der Eigenfunktionen sinngemäß zu modifizieren ist.

$$\begin{cases} \Phi_\nu(x,\lambda) - \lambda \int_a^x V(x,\xi)\,\Phi_\nu(\xi,\lambda)\,d\xi = \varphi_\nu(x), (\nu = 1;\ \ldots;\ n); \\ \overline{\Phi}_\nu(x,\lambda) + \lambda \int_x^b V(x,\xi)\,\overline{\Phi}_\nu(\xi,\lambda)\,d\xi = \overline{\varphi}_\nu(x), (\nu = 1;\ \ldots;\ \overline{n}); \\ \Psi_\nu(\xi,\lambda) - \lambda \int_\xi^b V(x,\xi)\,\Psi_\nu(x,\lambda)\,dx = \psi_\nu(\xi), \ (\nu = 1;\ \ldots;\ n); \\ \overline{\Psi}_\nu(\xi),\lambda) + \lambda \int_a^\xi V(x,\xi)\,\overline{\Psi}_\nu(x,\lambda)\,dx = \overline{\psi}_\nu(\xi), \ (\nu = 1;\ \ldots;\ \overline{n}). \end{cases} \tag{8}$$

Außerdem definieren wir als Hilfsfunktionen

$$\begin{cases} X_\nu(x,\lambda) = \varphi_\nu(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\xi,\lambda)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi, (\nu = 1;\ \ldots;\ n); \\ \overline{X}_\nu(x,\lambda) = \overline{\varphi}_\nu(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\xi,\lambda)\,\overline{\varphi}_\nu(\xi)\,d\xi, (\nu = 1;\ \ldots;\ \overline{n}). \end{cases} \tag{9}$$

Für $\Gamma(x,\xi,\lambda)$ finden wir dann, wie anschließend bewiesen werden soll, die Darstellung

$$\Gamma(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x,\lambda)\,\Psi_\nu(\xi,\lambda) \text{ für } x \leqq \xi, \\ \sum_{\nu=1}^{\overline{n}} \overline{X}_\nu(x,\lambda)\,\overline{\Psi}_\nu(\xi,\lambda) \text{ für } x > \xi. \end{cases} \tag{10}$$

Wir führen den Beweis für den Fall, daß $x \leqq \xi$ ist. Im Falle $x > \xi$ verläuft er entsprechend.

Wendet man auf Gleichung (3) die Formeln (2), (7) und (9) an, so erhält man

$$\begin{aligned} &\Gamma(x,\xi,\lambda) - \lambda \int_\xi^b \Gamma(x,\varrho,\lambda)\,V(\varrho,\xi)\,d\varrho \\ &\quad = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(\xi) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\varrho,\lambda) \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(\varrho)\,\psi_\nu(\xi)\,d\varrho, \\ &\quad = \sum_{\nu=1}^{n} \{\varphi_\nu(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\varrho,\lambda)\,\varphi_\nu(\varrho)\,d\varrho\} \cdot \psi_\nu(\xi), \\ &\quad = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x,\lambda)\,\psi_\nu(\xi). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die dritte Gleichung aus (8). Multipliziert man sie mit $X_\nu(x,\lambda)$ und summiert man über ν, so stimmen die rechten Seiten dieser und der eben abgeleiteten Volterraschen Integralgleichung

überein. Aus der Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich (10) für den Fall $x \leqq \xi$.

Für $x > \xi$ sind in der Beweisführung im Unterschied zu eben die in der Bezeichnung quer überstrichenen Funktionen zu verwenden.

Aus Gleichung (10) wollen wir die Funktionen $X_\nu(x, \lambda)$ und $\overline{X}_\nu(x, \lambda)$ mittels der Funktionen $\Phi_\nu(x, \lambda)$ und $\overline{\Phi}_\nu(x, \lambda)$ eliminieren. Durch Umkehrung von (9) erhalten wir

$$\begin{cases} X_\nu(x, \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, X_\nu(\xi, \lambda)\, d\xi = \varphi_\nu(x), (\nu = 1; \ldots; n); \\ \overline{X}_\nu(x, \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \overline{X}_\nu(\xi, \lambda)\, d\xi = \overline{\varphi}_\nu(x), (\nu = 1; \ldots; \overline{n}). \end{cases} \tag{11}$$

Wir berücksichtigen (2) und (7) und formen die Gleichungen um zu

$$\begin{cases} X_\nu(x,\lambda) - \lambda \int_a^x V(x,\xi) X_\nu(\xi,\lambda) d\xi = \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\mu(x) \{\delta_{\mu\nu} + \lambda \int_a^b \psi_\mu(\xi) X_\nu(\xi,\lambda) d\xi\}; \\ \overline{X}_\nu(x,\lambda) + \lambda \int_x^b V(x,\xi) \overline{X}_\nu(\xi,\lambda) d\xi = \sum_{\mu=1}^{\overline{n}} \overline{\varphi}_\mu(x) \{\delta_{\mu\nu} + \lambda \int_a^b \overline{\psi}_\mu(\xi) \overline{X}_\nu(\xi,\lambda) d\xi\}. \end{cases} \tag{12}$$

(Dabei ist $\delta_{\mu\nu}$ das bekannte Kroneckersymbol gleich 1 bzw. 0, je nachdem $\mu = \nu$ bzw. $\mu \neq \nu$ ist.)

Ein Vergleich von (12) mit den entsprechenden Gleichungen aus (8) liefert unter Beachtung der Eindeutigkeit der Lösung einer Volterraschen Integralgleichung

$$\begin{cases} X_\nu(x, \lambda) = \sum_{\mu=1}^{n} \Phi_\mu(x, \lambda) \{\delta_{\mu\nu} + \lambda \int_a^b \psi_\mu(\xi)\, X_\nu(\xi, \lambda)\, d\xi\}, \ (\nu = 1; \ldots; n); \\ \overline{X}_\nu(x, \lambda) = \sum_{\mu=1}^{\overline{n}} \overline{\Phi}_\mu(x,\lambda) \{\delta_{\mu\nu} + \lambda \int_a^b \overline{\psi}_\mu(\xi)\, \overline{X}_\nu(\xi,\lambda)\, d\xi\}, \ (\nu = 1; \ldots; \overline{n}). \end{cases} \tag{13}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen mit $\lambda \psi_\varkappa(x)$ bzw. $\lambda \overline{\psi}_\varkappa(x)$ und integrieren über x. Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$\begin{cases} H_{\varkappa\mu}(\lambda) = \int_a^b \psi_\varkappa(x)\, \Phi_\mu(x, \lambda)\, dx, (\varkappa; \mu = 1; \ldots; n); \\ \overline{H}_{\varkappa\mu}(\lambda) = \int_a^b \overline{\psi}_\varkappa(x)\, \overline{\Phi}_\mu(x, \lambda)\, dx, (\varkappa; \mu = 1; \ldots; \overline{n}), \end{cases} \tag{14}$$

so ergibt sich

$$\begin{cases} \sum_{\mu=1}^{n} \{\delta_{\varkappa\mu} - \lambda H_{\varkappa\mu}(\lambda)\} \cdot \{\delta_{\mu\nu} + \lambda \int_a^b \Psi_\mu(\xi) X_\nu(\xi, \lambda)\, d\xi\} = \delta_{\varkappa\nu}; \\ \sum_{\mu=6}^{\bar{n}} \{\delta_{\varkappa\mu} - \lambda \bar{H}_{\varkappa\mu}(\lambda)\} \cdot \{\delta_{\mu\nu} + \lambda \int_a^b \bar{\Psi}_\mu(\xi) \bar{X}_\nu(\xi, \lambda)\, d\xi\} = \delta_{\varkappa\nu}. \end{cases} \tag{15}$$

Damit ist unser Problem auf ein algebraisches reduziert. Wir lösen die Systeme (15) mittels der Cramerschen Regel nach

$$\delta_{\mu\nu} + \lambda \int_a^b \Psi_\mu(\xi) X_\nu(\xi, \lambda)\, d\xi \text{ bzw. } \delta_{\mu\nu} + \lambda \int_a^b \bar{\Psi}_\mu(\xi) \bar{X}_\nu(\xi, \lambda)\, d\xi$$

auf, tragen die Ergebnisse in die Gleichungen (13) ein und ersetzen schließlich noch in (10) die $X_\nu(x, \lambda)$ bzw. $\bar{X}_\nu(x, \lambda)$ durch die so gewonnenen Ausdrücke. Wir erhalten auf diese Weise

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda); \Psi_\mu(\xi, \lambda) \\ \Phi_\nu(x, \lambda) \quad ; \quad 0 \end{vmatrix}}{|\delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda)|} & \text{für } x \leqq \xi, \\ -\dfrac{\begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu} - \lambda \bar{H}_{\mu\nu}(\lambda); \bar{\Psi}_\mu(\xi, \lambda) \\ \bar{\Phi}_\nu(x, \lambda) \quad ; \quad 0 \end{vmatrix}}{|\delta_{\mu\nu} - \lambda \bar{H}_{\mu\nu}(\lambda)|} & \text{für } x > \xi. \end{cases} \tag{16}$$

Für die Berechnung des lösenden Kernes sind wir somit zu folgendem Verfahren gelangt: Man bestimme $V(x, \xi)$ nach (7) durch Subtraktion der beiden Bilinearausdrücke, durch welche $K(x, \xi)$ dargestellt ist. Damit gehe man in die Volterraschen Integralgleichungen (8) hinein und ermittle $\Phi_\nu(x, \lambda)$, $\bar{\Phi}_\nu(x, \lambda)$, $\Psi_\nu(\xi, \lambda)$ und $\bar{\Psi}_\nu(\xi, \lambda)$. Man rechne die $H_{\mu\nu}(\lambda)$ und $\bar{H}_{\mu\nu}(\lambda)$ mittels der Gleichungen (14). Die gewonnenen Ergebnisse trage man in die Formel (16) ein.

Es soll nun gezeigt werden, daß durch (16) $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ in der Fredholmschen Form gegeben ist, daß also zwischen den Zählern und Nennern aus (16) die Gleichung (5) erfüllt ist. Wir benötigen zu diesem Zweck die Hilfsformeln

$$\begin{cases} \int_a^b \Psi_\mu(x, \lambda) \Phi_\nu(x, \lambda)\, dx = -\dfrac{d\{\delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda)\}}{d\lambda}; \\ \int_a^b \bar{\Psi}_\mu(x, \lambda) \bar{\Phi}_\nu(x, \lambda)\, dx = -\dfrac{d\{\delta_{\mu\nu} - \lambda \bar{H}_{\mu\nu}(\lambda)\}}{d\lambda} \end{cases} \tag{17}$$

Um sie zu beweisen, differenziere man die erste Gleichung aus (8) nach λ, multipliziere mit $\lambda \Psi_\mu(x, \lambda)$ und integriere über x. Dann rechne man

$$0 = \lambda \int_a^b \Psi_\mu(x,\lambda) \frac{d}{d\lambda} \{\Phi_\nu(x,\lambda) - \lambda \int_a^x V(x,\xi)\, \Phi_\nu(\xi,\lambda)\, d\xi\}\, dx,$$

$$= \lambda \int_a^b \Psi_\mu(x,\lambda) \{\frac{d\,\Phi_\nu(x,\lambda)}{d\lambda} - \lambda \int_a^x V(x,\xi) \frac{d\,\Phi_\nu(\xi,\lambda)}{d\lambda} d\xi -$$

$$- \int_a^x V(x,\xi)\, \Phi_\nu(\xi,\lambda)\, d\xi\}\, dx,$$

$$= \lambda \int_a^b \{\Psi_\mu(x,\lambda) - \lambda \int_x^b V(\varrho,x)\, \Psi_\mu(\varrho,\lambda)\, d\varrho\} \frac{d\,\Phi_\nu(x,\lambda)}{d\lambda} dx -$$

$$- \lambda \int_a^b \int_x^b V(\varrho,x)\, \Psi_\mu(\varrho,\lambda)\, d\varrho\, \Phi_\nu(x,\lambda)\, dx,$$

$$= \lambda \int_a^b \psi_\mu(x) \frac{d\,\Phi_\nu(x,\lambda)}{d\lambda} dx + \int_a^b \{\psi_\mu(x) - \Psi_\mu(x,\lambda)\}\, \Phi_\nu(x,\lambda)\, dx,$$

$$= \frac{d}{d\lambda} \{\lambda \int_a^b \psi_\mu(x)\, \Phi_\nu(x,\lambda)\, dx\} - \int_a^b \Psi_\mu(x,\lambda)\, \Phi_\nu(x,\lambda)\, dx.$$

Damit ist wegen (14) die erste der Gleichungen (17) bewiesen. Der Beweis der zweiten Gleichung verläuft entsprechend.

Mit Hilfe der Gleichungen (17) ergibt sich

$$\begin{cases} \int_a^b \begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda); & \Psi_\mu(x,\lambda) \\ \Phi_\nu(x,\lambda) \quad ; & 0 \end{vmatrix} dx = \frac{d}{d\lambda} |\, \delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda)\,|; \\ \int_a^b \begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu} - \lambda \overline{H}_{\mu\nu}(\lambda); & \overline{\Psi}_\mu(x,\lambda) \\ \overline{\Phi}_\nu(x,\lambda) \quad ; & 0 \end{vmatrix} dx = \frac{d}{d\lambda} |\, \delta_{\mu\nu} - \lambda \overline{H}_{\mu\nu}(\lambda)\,|, \end{cases} \tag{18}$$

womit der Zusammenhang mit der Fredholmschen Theorie gezeigt ist.

Bezeichnet man mit $\overline{K}(x,\xi)$ bzw. $\overline{\Gamma}(x,\xi,\lambda)$ den Kern bzw. die Resolvente, die aus $K(x,\xi)$ bzw. $\Gamma(x,\xi,\lambda)$ hervorgehen, indem man längs der Hauptdiagonalen die Werte zu Gunsten des für $x > \xi$ angegebenen Ausdruckes abändert, so besteht offenbar, wie man durch Subtraktion der Gleichung (3) von der entsprechenden für $\overline{K}(x,\xi)$ und $\overline{\Gamma}(x,\xi,\lambda)$ geltenden Relation erkennt, auf der Hauptdiagonalen die Gleichung

$$\overline{\Gamma}(x,x,\lambda) - \Gamma(x,x,\lambda) = \overline{K}(x,x) - K(x,x) = V(x,x). \tag{19}$$

Unter Beachtung von (16) und (18) integriere man über x, anschließend über λ. Nach Erhebung in den Exponenten erhält man zunächst für kleine Werte von λ bis zur ersten Nullstelle

$$|\delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda)| = |\delta_{\mu\nu} - \lambda \overline{H}_{\mu\nu}(\lambda)| \cdot e^{\int_a^b V(x,x)\,dx \cdot \lambda} \quad (20)$$

Die Gleichung gilt über diese Nullstelle hinweg aber auch allgemein, da $|\delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda)|$ und $|\delta_{\mu\nu} - \lambda \overline{H}_{\mu\nu}(\lambda)|$ analytische Funktionen von λ sind.

Aus (20) ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Identität der Fredholmschen Nenner die Gleichung

$$\int_a^b V(x,x)\,dx = 0. \quad (21)$$

Sie ist bei stetigen Kernen wegen $V(x,x) \equiv 0$ stets erfüllt.

III. Die homogene Integralgleichung.

Es seien $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_\iota; \ldots$ die Eigenwerte und $\eta_1(x); \eta_2(x); \ldots; \eta_\iota(x); \ldots$ die zugehörigen Eigenfunktionen zum Kerne $K(x,\xi)$ aus (2). Dann ist

$$\eta_\iota(x) - \lambda_\iota \int_a^b K(x,\xi)\,\eta_\iota(\xi)\,d\xi = 0. \quad (22)$$

An diese Gleichung anknüpfend führen wir nun dieselben Umformungen durch wie im vorigen Abschnitt im Anschluß an Gleichung (11). Setzen wir

$$\vartheta_{\iota\nu} = \lambda_\iota \int_a^b \psi_\nu(\xi)\,\eta_\iota(\xi)\,d\xi, \quad (23)$$

so ergibt sich bei Durchführung der Rechnung analog zu (13) und (15)

$$\eta_\iota(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu(x, \lambda_\iota)\,\vartheta_{\iota\nu}; \quad (24)$$

$$\vartheta_{\iota\mu} - \lambda_\iota \sum_{\nu=1}^{n} H_{\mu\nu}(\lambda_\iota)\,\vartheta_{\iota\nu} = 0 \quad (25)$$

Jeder Eigenfunktion $\eta_\iota(x)$ des Kernes $K(x,\xi)$ aus (2) ist ein Eigenvektor $\{\vartheta_{\iota 1}; \ldots; \vartheta_{\iota n}\}$ der Matrix $H_{\mu\nu}(\lambda_\iota)$ zugeordnet und umgekehrt. Ist λ_ι ein p-facher Eigenwert von $K(x,\xi)$, so ist es auch ein p-facher Eigenwert von $H_{\mu\nu}(\lambda_\iota)$; denn aus linear unabhängigen $\eta_\iota^{(\pi)}(x)$ folgen wegen (23) und (24) linear unabhängige $\{\vartheta_{\iota 1}^{(\pi)}, \ldots; \vartheta_{\iota n}^{(\pi)}\}$, $(\pi = 1; \ldots; p)$ und umgekehrt.

Wir berechnen die Eigenwerte und Eigenfunktionen, indem wir zunächst das System (25) lösen und die Ergebnisse in Gleichung (24) eintragen. Es sei λ_ι eine Nullstelle des Fredholmschen Nenners $|\delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda)|$ und $r = n - p$ der Rang der Matrix. Ist $|\delta_{\mu'\nu'} - \lambda_\iota H_{\mu'\nu'}(\lambda_\iota)|$ eine von Null verschiedene r-reihige Unterdeterminante und sind $\nu_1; \ldots; \nu_p$ die hierin nicht enthaltenen Spaltenindizes, so erhält man für die Eigenfunktionen

$$\eta_\iota^{(\pi)}(x) = \begin{vmatrix} \delta_{\mu'\nu'} - \lambda_\iota H_{\mu'\nu'}(\lambda_\iota); & \delta_{\mu'\nu_\pi} - \lambda_\iota H_{\mu'\nu_\pi}(\lambda_\iota) \\ \Phi_{\nu'}(x, \lambda_\iota) & ; \quad \Phi_{\nu_\pi}(x, \lambda_\iota) \end{vmatrix}, (\pi = 1, \ldots; p). \quad (26)$$

Entsprechende Formeln gelten mit den quer überstrichen bezeichneten Funktionen, und schließlich sei noch bemerkt, daß man die adjungierte homogene Integralgleichung nach einem analogen Verfahren behandeln kann.

IV. Die Volterrasche Integralgleichung.

Im Abschnitt II war der Kern $V(x, \xi)$ der Volterraschen Integralgleichungen (8) gebildet worden durch Subtraktion der beiden Bilinearausdrücke, durch welche $K(x, \xi)$ in Gleichung (2) dargestellt ist. Ein entsprechender Zusammenhang besteht, wie wir nun zeigen werden, zwischen den Resolventen.

Aus der Volterraschen Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_a^x V(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = g(x) \quad (27)$$

mit $V(x, \xi)$ aus (7) ergibt sich durch Einführung von $K(x, \xi)$ aus (2) und unter Beachtung der aus (8) und (27) folgenden Relationen

$$\int_a^b \psi_\nu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi = \int_a^b \Psi_\nu(\xi, \lambda)\, g(\xi)\, d\xi, \quad (28)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = g(x) - \lambda \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \int_a^b \Psi_\nu(\xi, \lambda)\, g(\xi)\, d\xi. \quad (29)$$

Die Auflösung nach $y(x)$ liefert zunächst mit Blick auf (9)

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi, \lambda)\, g(\xi)\, d\xi - \lambda \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x, \lambda) \int_a^b \Psi_\nu(\xi, \lambda)\, g(\xi)\, d\xi,$$

und diese Gleichung vereinfacht sich wegen (10) zu

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \{\sum_{\nu=1}^{\overline{n}} \overline{X}_\nu(x, \lambda)\, \overline{\Psi}_\nu(\xi, \lambda) - \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x, \lambda)\, \Psi_\nu(\xi, \lambda)\}\, g(\xi)\, d\xi. \quad (30)$$

Die Resolvente der Volterraschen Integralgleichung ist die Differenz der beiden Ausdrücke, durch welche $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ dargestellt ist, und unsere Behauptung bewiesen.

V. Anwendung auf Randwertprobleme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen.

Bekanntlich läßt sich, wenn nicht der sogenannte Ausnahmefall vorliegt, mittels der Greenschen Funktion das Randwertproblem

$$u_\mu(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b)\} = 0, \quad (\mu = 1; \ldots; n) \tag{31}$$

der Differentialgleichung

$$L(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x) y^{(\nu)}(x) = \lambda r(x) y(x) + F(x), \quad (p_n(x) > 0) \tag{32}$$

zurückführen auf die Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi = f(x) \equiv \int_a^b G(x, \xi) F(\xi) d\xi \tag{33}$$

mit dem Kern

$$K(x, \xi) = G(x, \xi) \cdot r(\xi). \tag{34}$$

Es ist (siehe etwa [1], Seite 329)

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\begin{vmatrix} u_\mu(\varphi_\nu), \sum_{\varrho=0}^{n-1} \sum_{\delta=1}^{n} \beta_{\mu\varrho} \varphi_\delta^{(\varrho)}(b)\, \hat{\varphi}_\delta(\xi) \\ \varphi_\nu(x) \; ; \qquad 0 \end{vmatrix}}{|u_\mu(\varphi_\nu)|} & \text{für } x \leqq \xi, \\ \dfrac{\begin{vmatrix} u_\mu(\varphi_\nu); \; -\sum_{\varrho=0}^{n-1} \sum_{\delta=1}^{n} \alpha_{\mu\varrho} \varphi_\delta^{(\varrho)}(a)\, \hat{\varphi}_\delta(\xi) \\ \varphi_\nu(x) \; ; \qquad 0 \end{vmatrix}}{|u_\mu(\varphi_\nu)|} & \text{für } x \geqq \xi, \end{cases} \tag{35}$$

wo $\varphi_1(x); \ldots; \varphi_n(x)$ ein Hauptsystem der Differentialgleichung

$$L(\varphi(x)) = 0 \tag{36}$$

ist, und $\hat{\varphi}_1(\xi); \ldots; \hat{\varphi}_n(\xi)$ sich aus den Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\mu^{(\nu)}(\xi)\, \hat{\varphi}_\mu(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < n-1, \\ \dfrac{r(\xi)}{p_n(\xi)} & \text{für } \nu = n-1 \end{cases} \tag{37}$$

ergeben.

Bezeichnet man in (35) nach Durchführung einer Entwicklung der Zählerdeterminanten nach der letzten Zeile die Koeffizienten der $\varphi_\nu(x)$ mit $\psi_\nu(\xi)$ bzw. $\overline{\psi}_\nu(\xi)$, so hat man den Zusammenhang mit Formel (2) hergestellt. Mittels der in den Abschnitten II und III entwickelten Beziehungen kann man nun Resolvente, Eigenwerte und Eigenfunktionen berechnen.

Die Formeln, die man gewinnt, unterscheiden sich von denen, die man etwa in [3], S. 259 findet. Für die Resolvente z. B. hat man dort in unserer Bezeichnungsweise

$$\Gamma(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\begin{vmatrix} u_\mu(\Phi_\nu); & \sum\limits_{\varrho=0}^{n-1}\sum\limits_{\delta=1}^{n}\beta_{\mu\varrho}\,\Phi_\delta^{(\varrho)}(b,\lambda)\,\hat{\Psi}_\delta(\xi,\lambda)\\ \Phi_\nu(x,\lambda); & 0\end{vmatrix}}{|u_\mu(\Phi_\nu)|} & \text{für } x\leqq\xi,\\[2ex] \dfrac{\begin{vmatrix} u_\mu(\Phi_\nu); & -\sum\limits_{\varrho=0}^{n-1}\sum\limits_{\delta=1}^{n}\alpha_{\mu\varrho}\,\Phi_\delta^{(\varrho)}(a,\lambda)\,\hat{\Psi}(\xi,\lambda)\\ \Phi_\nu(x,\lambda); & 0\end{vmatrix}}{|u_\mu(\Phi_\nu)|} & \text{für } x\geqq\xi,\end{cases}\tag{38}$$

wo $\Phi_1(x,\lambda);\ \ldots;\ \Phi_n(x,\lambda)$ die Lösungen der Differentialgleichung

$$L(\Phi(x,\lambda))-\lambda\,r(x)\,\Phi(x,\lambda)=0\tag{39}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\Phi_\mu^{(\varrho)}(a,\lambda)=\varphi_\mu^{(\varrho)}(a),\ (\mu=1;\ \ldots;\ n\ .\ \varrho=0;1;\ \ldots;\ n-1)\tag{40}$$

(vgl. Gleichung (8)) sind, und $\hat{\Psi}_1(\xi,\lambda);\ \ldots;\ \hat{\Psi}_n(\xi,\lambda)$ die Bedingungen erfüllen

$$\sum_{\mu=1}^{n}\Phi_\mu^{(\nu)}(\xi,\lambda)\,\hat{\Psi}(\xi,\lambda)=\begin{cases}0 & \text{für } \nu<n-1,\\ \dfrac{r(\xi)}{p_n(\xi)} & \text{für } \nu=n-1.\end{cases}\tag{41}$$

Die Überführung der Formeln ineinander kann mit Hilfe des Sylvesterschen Determinantensatzes vorgenommen werden.

Wir wollen nun auch den Ausnahmefall betrachten, also voraussetzen, daß es genau p linear unabhängige Lösungen $\varphi_{r+1}(x);\ \ldots;\ \varphi_n(x)$, $(r=n-p)$ der Differentialgleichung (36) gibt, für welche die Gleichungen

$$u_\mu(\varphi_{\nu''})=0,\ (\mu=1;\ \ldots;\ n\ .\ \nu''=r+1;\ \ldots;\ n)\tag{42}$$

erfüllt sind.

Weil der Kern $K(x, \xi)$ aus (35) bzw. (2) in diesem Falle bekanntlich nicht existiert, versagen die Formeln der Abschnitte II und III. Das Verfahren kann indessen so modifiziert werden, daß es auch hier anwendbar bleibt.

Da die Matrix $\{u_\mu(\varphi_{\nu'})\}$, $(\mu = 1; \ldots; n \,.\, \nu' = 1; \ldots; r)$ den Rang r hat, ist es möglich, in geeigneter Weise eine komplimentäre Matrix $\{\varepsilon_{\mu\,\nu''}\}$, $(\mu = 1; \ldots; n \,.\, \nu'' = r+1; \ldots; n)$ anzugeben, so daß die Determinante $|\, u_\mu(\varphi_{\nu'}); \varepsilon_{\mu\,\nu''} \,|$ von Null verschieden ist.

Wir setzen nun

$$\left\{\begin{aligned}
\psi_\varkappa(\xi) &= \frac{\begin{vmatrix} u_\mu(\varphi_{\nu'}); & \varepsilon_{\mu\nu''}; \sum_{\varrho=0}^{n-1}\sum_{\delta=1}^{n} \beta_{\mu\varrho}\,\varphi_\delta^{(\varrho)}(b)\,\hat{\psi}_\delta(\xi) \\ \delta_{\varkappa\nu'}; & \delta_{\varkappa\nu''}; & 0 \end{vmatrix}}{|\, u_\mu(\varphi_{\nu'}); \varepsilon_{\mu\nu''} \,|}, \quad (\varkappa = 1; \ldots; n) \\
\overline{\psi}_\varkappa(\xi) &= \frac{\begin{vmatrix} u_\mu(\varphi_{\nu'}); \varepsilon_{\mu\nu''}; -\sum_{\varrho=0}^{n-1}\sum_{\delta=1}^{n} \alpha_{\mu\varrho}\,\varphi_\delta^{(\varrho)}(a)\,\hat{\psi}_\delta(\xi) \\ \delta_{\varkappa\nu'}\ ; & \delta_{\varkappa\nu''}; & 0 \end{vmatrix}}{|\, u_\mu(\varphi_{\nu'}); \varepsilon_{\mu\nu''} \,|}, \quad (\varkappa = 1; \ldots; n); \\
\overline{\varphi}_\varkappa(x) &= \varphi_\varkappa(x), \quad (\varkappa = 1; \ldots; n).
\end{aligned}\right. \tag{43}$$

Mit diesen Funktionen lösen wir die Integralgleichungen (8), wobei zur Bestimmung von $V(x, \xi)$ an Stelle von (7) die Gleichung

$$V(x, \xi) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_\varkappa(x)\,\hat{\psi}_\varkappa(\xi) \tag{44}$$

tritt. Dann berechne man nach (14) die Matrizen $H_{\mu\nu}(\lambda)$ und $\overline{H}_{\mu\nu}(\lambda)$. Setzt man

$$\delta_{\mu\nu}^{(p)} = \begin{cases} \delta_{\mu\nu} \text{ für } \mu = 1; \ldots; r, \ (r = n - p), \\ 0 \ \text{ für } \mu = r+1; \ldots; n, \end{cases} \tag{45}$$

so erscheint an Stelle von (16) die Gleichung

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu}^{(p)} - \lambda\, H_{\mu\nu}(\lambda); & \Psi_\mu(\xi, \lambda) \\ \Phi_\nu(x, \lambda); & 0 \end{vmatrix}}{|\, \delta_{\mu\nu}^{(p)} - \beta\, H_{\mu\nu}(\lambda) \,|} & \text{für } x \leqq \xi, \\ \dfrac{\begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu}^{(p)} - \lambda\, \overline{H}_{\mu\nu}(\lambda); & \overline{\Psi}_\mu(\xi, \lambda) \\ \overline{\Phi}_\nu(x, \lambda) \quad ; & 0 \end{vmatrix}}{|\, \delta_{\mu\nu}^{(p)} - \lambda\, \overline{H}_{\mu\nu}(\lambda) \,|} & \text{für } x \geqq \xi. \end{cases} \tag{46}$$

Der Beweis wird mit Hilfe des Sylvesterschen Determinantensatzes durch Herleitung aus Gleichung (38) erbracht.

Entsprechend modifizierte Formeln ($\delta_{\mu\nu}$ wird durch $\delta_{\mu\nu}^{(\varphi)}$ ersetzt) gelten für die Eigenwerte und Eigenfunktionen.

VI. Allgemeiner Zusammenhang der Integralgleichung mit hauptdiagonalunstetigem Polynomkern und ihrer Differentialgleichung.

Wir wollen in diesem Abschnitt wieder die Integralgleichung (1) mit $K(x, \xi)$ aus (2) betrachten und unter gewissen Zusatzvoraussetzungen eine Umformung auf ein Randwertproblem einer Differentialgleichung vornehmen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir in Gleichung (2) annehmen, daß $n = \bar{n}$ und $\varphi_\nu(x) \equiv \overline{\varphi}_\nu(x)$ ist; denn ist der Kern nicht schon in dieser Form gegeben, so können wir ihn darauf sofort bringen, indem wir die Zahl der Summanden erhöhen, eine geeignete Umbenennung der Indizes vornehmen und die fehlenden Glieder mit dem Koeffizienten Null hinzufügen.

In dem so reduzierten Ansatz

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(\xi) \text{ für } x \leqq \xi, \\ \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\, \overline{\psi}_\nu(\xi) \text{ für } x > \xi \end{cases} \tag{47}$$

denken wir uns eine Vereinfachung dahingehend bereits durchgeführt, daß die $\varphi_\nu(x)$ voneinander linear unabhängig sind. Außerdem sollen gleichgeartete lineare Abhängigkeiten

$$\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \psi_\nu(\xi) = 0;\ \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \overline{\psi}_\nu(\xi) = 0;\ \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu| > 0\right) \tag{48}$$

innerhalb der $\psi_\nu(\xi)$ und $\overline{\psi}_\nu(\xi)$ durch Verminderung der Summandenzahl in (47) beseitigt sein.

Wir setzen noch voraus, daß $f(x)$ und sämtliche Kernfunktionen $\varphi_\nu(x)$, $\psi_\nu(\xi)$, $\overline{\psi}_\nu(\xi)$ n-mal stetig differenzierbar sind, und schreiben die Integralgleichung (1) mit $K(x, \xi)$ aus (47) in der ausführlichen Form

$$y(x) - f(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \left\{ \int_a^x \overline{\psi}_\nu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \int_x^b \psi_\nu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi \right\}. \tag{49}$$

Von dieser Gleichung bilden wir nun die ersten n Ableitungen, eliminieren aus dem gewonnenen System die Integrale und erhalten die Determinantengleichung

$$|y^{(\nu)} - f^{(\nu)}; \varphi_\mu^{(\nu)}| = \lambda \Big| \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (\chi_\varrho\, y)^{(\nu-1-\varrho)}; \varphi_\mu^{(\nu)} \Big|, \quad (\mu = 1; \ldots; n \,.\, \nu = 0; \ldots; n), \tag{50}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\chi_\varrho(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\mu^{(\varrho)}(x) \{\bar{\psi}_\mu(x) - \psi_\mu(x)\}, \tag{51}$$

und an Stelle der rechts stehenden Summe für $\nu = 0$ der Wert 0 einzusetzen ist.

Entwickelt man jetzt Gleichung (50) nach Ableitungen von y, so erhält man

$$L(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x) = \lambda \sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x) + F(x), \tag{52}$$

wo

$$\begin{cases} p_\nu(x) = |\, \delta_{\nu\varrho};\ \varphi_\mu^{(\varrho)} \,|, \quad (\nu = 0; \ldots; n); \\ q_\nu(x) = \sum_{\varrho=\nu+1}^{n} \sum_{\mu=0}^{\varrho-1-\nu} \binom{\varrho-1-\mu}{\nu} \chi_\mu^{(\varrho-1-\mu-\nu)}(x)\, p_\varrho(x), \ (\nu = 0; \ldots; n-1); \\ F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\, f^{(\nu)}(x) = L(f) \end{cases} \tag{53}$$

ist. Die Funktionen $\varphi_1(x); \ldots; \varphi_n(x)$ sind ein Hauptsystem der Differentialgleichung

$$L(\varphi(x)) = 0. \tag{54}$$

Es fehlt noch das Randwertproblem. Versucht man, es herzuleiten, so zeigt sich, daß es unter gewissen sehr plausiblen Voraussetzungen keineswegs immer existiert. Es ist vielmehr an die einschneidenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen geknüpft, daß es n-linear unabhängige Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \{c_{\mu\nu}\, \psi_\nu(\xi) + \bar{c}_{\mu\nu}\, \bar{\psi}_\nu(\xi)\} = 0, \quad (\mu = 1; \ldots; n) \tag{55}$$

gibt, die zudem nicht durch Linearkombinationen auf die Form (48) gebracht werden können.

Bestehen diese Gleichungen, so lautet das Randwertproblem

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \{\alpha_{\mu\nu} [y^{(\nu)}(a) - f^{(\nu)}(a) - \lambda \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (\chi_\varrho(a)\, y(a))^{(\nu-1-\varrho)}] + \\ + \beta_{\mu\nu} [y^{(\nu)}(b) - f^{(\nu)}(b) - \lambda \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (\chi_\varrho(b)\, y(b))^{(\nu-1-\varrho)}]\} = 0, \tag{56}$$

$$(\mu = 1; \ldots; n),$$

wobei die Koeffizienten sich ergeben als Lösungen des Gleichungssystems

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\mu\nu}\, \varphi_\varrho^{(\nu)}(a) = c_{\mu\varrho};\ \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{\mu\nu}\, \varphi_\varrho^{(\nu)}(b) = \bar{c}_{\mu\varrho};\quad (\mu;\varrho = 1;\ \ldots;\ n). \tag{57}$$

Ist ferner

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \{\alpha_{\mu\nu}\, f^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu}\, f^{(\nu)}(b)\} = 0,\quad (\mu = 1;\ \ldots;\ n), \tag{58}$$

so wird das Randwertproblem homogen.

Es reduziert sich darüber hianus auf

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \{\alpha_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(b)\} = 0:,\quad (\mu = 1;\ \ldots;\ n), \tag{59}$$

und wird damit frei vom Parameter λ, wenn die Matrix

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_{\mu\nu};\ \beta_{\mu\delta} \\ A_{\iota\nu};\ B_{\iota\delta} \end{matrix} \right\} (\mu;\iota = 1;\ \ldots;\ n\ .\ \nu;\ \delta = 0;\ \ldots;\ n-1) \tag{60}$$

den Rang n hat. Dabei ist

$$\begin{cases} A_{\iota\nu} = \sum_{\varrho=\nu+1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\varrho-1-\nu} \binom{\varrho-1-\mu}{\nu} \chi_\mu^{(\varrho-1-\mu-\nu)}(a)\, \alpha_{\iota\varrho},\ (\iota=1;\ \ldots;\ n.\ \nu=0;\ \ldots;\ n-2) \\ B_{\iota\varkappa} = \sum_{\varrho=\varkappa+1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\varrho-1-\varkappa} \binom{\varrho-1-\mu}{\varkappa} \chi_\mu^{(\varrho-1-\mu-\varkappa)}(b)\, \beta_{\iota\varrho},\ (\iota=1;\ \ldots;\ n.\ \varkappa=0;\ \ldots;\ n-2); \\ A_{\iota n-1} = B_{\iota n-1} = 0,\ (\iota = 1;\ \ldots;\ n). \end{cases} \tag{61}$$

Wie man aus (53) und (61) folgert, ist die Rangbedingung stets erfüllt, wenn

$$q_\nu^{(\mu)}(a) = q_\nu^{(\mu)}(b) = 0,\ (\mu < \nu) \tag{62}$$

ist.

Es soll nun auch das Umkehrproblem erörtert werden. Gegeben sei die Differentialgleichung (52), wobei wir $p_n(x) > 0$ und die Gleichungen (62) voraussetzen wollen. Das Randwertproblem (59) soll auf eine Integralgleichung zurückgeführt werden.

Zunächst hat man aus dem zweiten Komplex der Gleichungen (53) successiv die Funktionen $\chi_\mu(x)$ zu ermitteln. Dann ergibt sich der Kern aus den Bedingungen

$$\begin{cases} L_x(K(x,\xi)) = 0 \text{ für } x \neq \xi; \\ \dfrac{\partial^\nu K(\xi+,\xi)}{\partial x^\nu} - \dfrac{\partial^\nu K(\xi-,\xi)}{\partial x^\nu} = \chi_\nu(\xi),\ (\nu = 0;\ \ldots;\ n-1), \\ \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\alpha_{\mu\nu} \dfrac{\partial^\nu K(a,\xi)}{\partial x^\nu} + \beta_{\mu\nu} \dfrac{\partial^\nu K(b,\xi)}{\partial x^\nu}\} = 0;\ (\mu=1;\ \ldots;\ n). \end{cases} \tag{63}$$

Die Funktion $f(x)$ gewinnt man aus (53) (letzte Gleichung) und (58) mittels der Greenschen Funktion.

Literatur.

[1] *W. Schmeidler*: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Bd. I. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950.
[2] *Ph. Frank* und *R. v. Mises*: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. 2. Auflage, Braunschweig 1930.
[3] *E. L. Jnce*: Ordinary Differential Equations. Longmans Green and Co. Ltd. 1927.

Geometrische Bemerkungen zu einigen Grundfragen der algebraischen Geometrie in idealtheoretischer Begründung.

Von

Werner Burau, Hamburg.

(Eingelangt am 13. Juni 1951.)

Bei einer eingehenden Untersuchung der Veroneseschen Mannigfaltigkeiten, d. h. der Verallgemeinerungen der bekannten Veroneseschen Fläche des P_5, ist der Verfasser der folgenden Zeilen von selber auf eine rein geometrische Fassung einiger Grundbegriffe der algebraischen Geometrie, wie Schnittmultiplizität, Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Schnitt von Hyperflächen usw., gelangt. Bei näherer Betrachtung zeigte es sich dann, daß die so gewonnenen Begriffsbildungen genau auf das führten, was man in der von Herrn *W. Gröbner* besonders befürworteten idealtheoretischen Begründung der algebraischen Geometrie[1] auch rein algebraisch herleiten kann. Insbesondere erfüllt der hier gewonnene Multiplizitätsbegriff nicht die Forderungen des allgemeinen Satzes von *Bézout*, wie man es gerne haben möchte; dies ist auch nicht weiter zu verwundern, da er nach einer Bezeichnung von Herrn *Severi* „statisch" ist und den mehrfachen Schnitt nicht als Grenzlage von einfachen erklärt. Für manche Zwecke genügen jedoch die im folgenden auseinandergesetzten Begriffsbildungen durchaus; abgesehen von ihrem rein geometrischen Interesse mögen sie dazu beitragen, manchem Geometer die etwas abstrakt erscheinenden Dinge der Idealtheorie durchsichtiger zu machen.

Im § 1 werden einige Bezeichnungen eingeführt sowie dasjenige über die Veroneseschen Mannigfaltigkeiten entwickelt, was wir für unseren Zweck benötigen. In § 2 wird dann die Frage der Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Durchschnitt von Hyperflächen mit Hilfe der Begriffe des § 1 untersucht werden, während schließlich im § 3 der idealtheoretische Multiplizitätsbegriff in geometrischer Form allmählich entwickelt wird.

---

[1] s. *W. Gröbner*, Moderne algebraische Geometrie, Wien und Innsbruck 1949.

§ 1. Veronesesche Mannigfaltigkeiten und damit zusammenhängende geometrische Tatsachen.

Wir wollen, wie es meist üblich ist, algebraische Geometrie über dem Körper der komplexen Zahlen treiben. Mit unteren Indizes sollen im Falle von Mannigfaltigkeiten stets Dimensionen bezeichnet werden, so daß also M_d eine Mannigfaltigkeit von d-komplexen Dimensionen und P_n den n-dimensionalen projektiven Raum bedeuten. Spannt die Punktmenge M des P_n den Teilraum P_m darin auf ($m \leqslant n$), so wollen wir dafür kurz schreiben: $P_m = \langle M \rangle$.

Von grundlegender Bedeutung für alle unsere Betrachtungen erweisen sich folgende in Parametern definierten Mannigfaltigkeiten:

$$x_{i_0 i_1 \dots i_n} = u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_r} \quad (i_0 + i_1 + \dots + i_n = k), \tag{1}$$

worin rechts alle Monome k-ten Grades in den (u) zu stehen kommen. Für $n = 1$ und beliebiges k liegt die rationale Normkurve C_1^k des P_k vor, für $n = 2$ und $k = 2$ die viel untersuchte Veronesesche Fläche des P_5. Allgemein wird durch (1) eine den $P_{\binom{n+k}{k}-1}$ aufspannende M_n definiert, die bei uns V_n^k heißen soll. Die V_n^k sind ausnahmslos eineindeutige Bilder des Parameter-U_n der (u_i), und die Punkte von V_n^k sollen die V^k-Bilder der entsprechenden Punkte des U_n genannt werden. Allgemeiner als (1) ist die Darstellung

$$y_{i_0 i_1 \dots i_n} = \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}(u_0, u_1, \dots, u_n) \tag{2}$$

die projektiv dieselbe V_n^k liefert, wenn rechts statt der Monome irgendeine Basis aller homogenen u-Polynome k-ten Grades steht. Sind auf der rechten Seite von (2) nicht alle, sondern nur $m + 1 < \binom{n+k}{k}$ linear unabhängige Formen k-ten Grades gegeben, so definiert (2) nicht die V_n^k, sondern eine Projektion derselben in den P_m. Als Projektionszentrum tritt dabei ein gewisser linearer Raum auf, der durch Nullsetzen der in (2) vorhandenen y (unter denen mit allen möglichen Indexvariationen) definiert ist. Die Dimension kann dabei beim Projizieren auch kleiner als n geworden sein.

Es sei nunmehr an die folgenden bekannten und leicht zu begründenden Tatsachen erinnert: Die Hyperebenen $\Sigma a_{i_0 i_1 \dots i_n} x_{i_0 i_1 \dots i_n} = 0$ und die Hyperflächen k-ten Grades $\Sigma a_{i_0 i_1 \dots i_n} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} = 0$ des Parameterraumes U_n entsprechen sich eineindeutig; ebenso ordnet man die Punkte des $\langle V_n^k \rangle$ und die Hyperflächen k-ter Klasse des U_n so einander zu, daß den Punkten der V_n^k selber die in den entsprechenden

k-fach zählenden Punkt entarteten Hyperflächen k-ter Klasse des U_n zugeordnet sind. Man kann nun aber auch für $N \geqslant k$ der beliebigen Hyperfläche k-ten Grades des U_n mit der Gleichung $f = 0$ einen linearen Raum $L^N(f)$ im $\langle V_n^N \rangle$ zuordnen; $L^N(f)$ ist dabei als Schnitt der allen Hyperflächen N-ten Grades $f.g = 0$ zugeordneten Hyperebenen definiert, wobei für g alle Formen des Ergänzungsgrades $N—k$ zu setzen sind (es genügt natürlich, sich dabei auf alle Monome des Grades $N—k$ zu beschränken). Dann gilt folgender

Satz 1. Besitzt die Hyperfläche k-ten Grades $f = 0$ keine mehrfach zählenden Bestandteile, so wird der Raum $L^N(f)$ $(N \geqslant k)$ durch die V^N-Bilder der Punkte der Hyperfläche aufgespannt. Zerfällt $f = f_1 . f_2 \ldots f_s$ in die zu je zweien teilerfremden Bestandteile $f_1, f_2, \ldots, f_s$, so wird der Raum $L^N(f)$ durch die Räume $L^N(f_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ aufgespannt.

Beweis: Der erste Teil des Satzes ist weiter nichts als die geometrische Übersetzung des folgenden algebraischen Sachverhalts: Wenn die Hyperfläche N-ten Grades mit der Gleichung $F = 0$ alle Punkte der Hyperfläche k-ten Grades $f = 0$ $(N \geqslant k)$ enthält, so muß jeder der verschiedenen Faktoren von f in F als Faktor auftreten. Da f nach Voraussetzung aber nur aus verschiedenen Faktoren bestehen sollte, so muß f ganz in F als Faktor enthalten sein. Zum Beweis des zweiten Teiles beachte man, daß jede Hyperebene des $\langle V_n^N \rangle$, die $L^N(f)$ enthält, nach Definition von $L^N(f)$ einem Polynom N-ten Grades $F = f.g$ zugeordnet ist, wobei g vom Grade $N — k$ ist. Da sich jedes solche F aber auch in den Formen $f_i . g_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ schreiben läßt, enthält $L^N(f)$ auch alle Räume $L^N(f_i)$. Sei umgekehrt H eine Hyperebene des $\langle V_n^N \rangle$, die alle Räume $L^N(f_i)$ enthält, so ist H eine Hyperfläche N-ten Grades $F = 0$ zugeordnet, die alle f_i als Faktoren enthält, also wegen der vorausgesetzten Teilerfremdheit derselben auch ihr Produkt $f = f_1 \ldots f_s$.

Von großer Wichtigkeit für das Folgende sind nun die Schmiegräume in einem Punkt der V_n^k. Um sie einzuführen, schreiben wir die Parameterdarstellung (1) der V_n^k vorübergehend vektoriell:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_0, u_1, \ldots, u_n). \tag{3}$$

Definiert man dann mit $T^{(s)}$ den Schmiegraum s-ter Stufe im festen Punkt $(\bar{u}_i)$, so ist dies derjenige Raum, der durch den Punkt $\mathfrak{x}(\bar{u}_i)$ geht und von den dort angehefteten Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u_i \partial u_i}$ usf. bis

$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_s}}$ aufgespannt wird, wobei die i dabei jeweils alle Indexvariationen durchlaufen und in die Ableitungen die Werte $(\bar{u}_i)$ einzusetzen sind. Man stellt wegen der durch die Homogenität bedingten linearen Abhängigkeiten der Ableitungsvektoren sofort folgendes fest: $T^{(s)}$ hat die Dimension $\binom{n+s}{s} - 1$ und fällt bei $s = k$ mit dem Raum $\langle V_n^k \rangle$ selber zusammen; ferner gilt natürlich $T^{s-1} \subset T^s$. Nimmt man für den betrachteten Punkt der V_n^k etwa die Parameter $(u_i) = (0, \dots, 0,1)$ an, so überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit der folgenden Beziehung:

Satz 2. In der Abbildung der Punkte des Raumes $\langle V_n^k \rangle$ und der Hyperflächen k-ter Klasse des P_n entsprechen sich: Punkte eines Schmiegraums und $T^{(s)}$ Gesamtheit der Hyperflächen k-ter Klasse, die in einen festen, k—s-fach zählenden Punkt und in eine beliebige Hyperfläche s-ter Klasse zerfallen.

Hieraus ergibt sich weiterhin: $T^{(s)}$ wird seinerseits durch die Punkte einer ausgezeichneten V_n^s aufgespannt, deren Punkte sich ergeben, wenn die auf der rechten Seite der Beziehung von Satz 2 stehenden Hyperflächen s-ter Klasse in einen beliebigen s-fach zählenden Punkt zerfallen. Die in $T^{(s)}$ enthaltenen niederen Schmiegräume $T^{(s-1)}$ sind dann auch Schmiegräume an die V_n^s.

Über die Inzidenzen der Schmiegräume in verschiedenen Punkten gilt der folgende

Satz 3. Zwei Schmiegräume $T^{(p)}$ und $T^{(q)}$ einer V, die zu zwei verschiedenen Punkten gehören, schneiden sich bei $p + q < k$ nicht, bei $p + q \geqslant k$ jedoch in einem Raum von $\binom{n+p+q-k}{p+q-k} - 1$ Dimensionen, der jeweilig Schmieg-$T^{(p+q-k)}$ an die nach Satz 2 je im $T^{(p)}$ und $T^{(q)}$ liegenden ausgezeichneten V_n^p und V_n^q ist.

Beweis: Man braucht hierzu auf Grund der Ergebnisse des vorherigen Satzes sich nur zu überlegen, ob es Hyperflächen k-ter Klasse gibt, die in einen festen k—p-fach zählenden Punkt, einen davon verschiedenen k—q-fach zählenden Punkt und einen beliebigen Rest zerfallen. Dies ist offenbar nur bei $k \geqslant p + q$ möglich, und in diesem Falle bilden die Hyperflächen dieser Art ersichtlich ein von $\binom{n+p+q-k}{p+q-k} - 1$ Parametern abhängiges Linearsystem.

Mit Hilfe der Schmiegräume kann man nun besonders leicht das singuläre Verhalten von Mannigfaltigkeiten beschreiben. Zunächst gilt folgende Aussage über Hyperflächen:

Satz 4. Ist der Punkt P der Hyperfläche k-ten Grades $f(u_0, u_1, \ldots, u_n) = 0$ mindestens $s+1$-fach, so enthält der Bildraum $L^N(f)$ den Schmiegraum $T^{(s)}$ des Bildpunktes von P und umgekehrt.

Beweis: Nehmen wir zunächst $N = k$ an und für P die Koordinaten $(0, \ldots, 0,1)$. Dann bedeutet die Voraussetzung, daß f in u_n keine höheren Potenzen als u_n^{k-s-1} enthält. Im Raume $\langle V_n^k \rangle$ ist f demnach eine Hyperebene $L^k(f)$ mit der Gleichung

$$\Sigma\, a_{i_0 \ldots i_n}\, x_{i_0 \ldots i_n} = 0$$

zugeordnet, wobei die Koeffizienten $a_{i_0 \ldots i_n}$ mit $i_n > k - s$ verschwinden; diese Hyperebene enthält aber ersichtlich den durch die Gleichungen

$$x_{i_0 \ldots i_n} = 0 \quad (i_n \leqslant k - s)$$

beschriebenen Schmiegraum $T^{(s)}$ des Punktes P. Bei $N > k$ beachte man, daß jeder Hyperebene des $\langle V_n^N \rangle$ durch $L^N(f)$ eine Hyperfläche N-ten Grades mit der Gleichung $f.g = 0$ zugeordnet ist. Mit $f = 0$ hat aber natürlich auch jede Hyperfläche $f.g = 0$ mit beliebigem g vom Grade $N-k$ in P einen mindestens $s+1$-fachen Punkt. Die Umkehrung ergibt sich ebenso leicht.

Es ist für uns jetzt wichtig, durch folgenden Satz eine noch etwas genauere Einsicht in das Verhalten der weiteren Schmiegräume im Bildpunkt eines singulären Punktes von $f = 0$ zu gewinnen.

Satz 5. $f(u_0, \ldots, u_n) = 0$ sei eine Hyperfläche k-ten Grades, die $(0, \ldots, 0,1)$ genau als $s+1$-fachen aber nicht als $s+2$-fachen Punkt besitzt, dann schneidet der Raum $L^N(f)$ aus dem Schmiegraum $T^{(s+1)}$ des Bildpunktes von $(0, \ldots, 0,1)$ genau eine Hyperebene aus und allgemein aus dem $T^{(s+t)}$ desselben Punktes einen Raum von $\binom{n+s+t}{s+t} - \binom{n+t-1}{t-1} - 1$ Dimensionen; dabei ist $N > k + t$ vorauszusetzen.

Beweis: Wir zählen zunächst die Dimension von $L^N(f)$ ab. Diese ist $\binom{n+N}{N} - \binom{n+N-k}{N-k} - 1$, da es $\binom{n+N-k}{N-k}$ linear unabhängige Polynome des Grades N gibt, die den festen Bestandteil k-ten Grades f besitzen. Um dann die Dimension des Verbindungsraumes $L \cup T^{(s+t)}(P)$ zu erfahren, hat man nach Satz 4 abzuzählen, wie viele linear unabhängige Hyperflächen des Grades N es gibt, die f als Faktor besitzen und für die außerdem noch der Punkt P mindestens $s+t+1$-fach ist. Da P für f nun schon $s+1$-fach ist, aber nicht $s+2$-fach, muß der Bestandteil g in einer solchen Hyperfläche N-ten Grades $f.g=0$ in P mindestens t-fach sein. Damit errechnet sich die Dimension des Raumes $L^N(f) \cup$

$\cup\, T^{(s+t)}$ zu $\binom{n+N}{N} - \binom{n+N-k}{N-k} + \binom{n+t-1}{t-1} - 1$ und daher die von $L^N(f) \cap T^{(s+t)}$ zu $\binom{n+s+t}{s+t} - \binom{n+t-1}{t-1} - 1$, wie behauptet.

Bemerkung; Man kann diesen Satz auch auf den Fall $s = -1$ ausdehnen. Dann wird darin behauptet, daß der Schmiegraum T^{t-1} in einem nicht auf $L^N(f)$ liegenden Punkt der V_n^N zu $L^N(f)$ windschief ist. Daß dies stimmt, folgt einfach daraus, daß die zerfallende Hyperfläche N-ten Grades $f.g = 0$ bei $f(0, \ldots, 0{,}1) \neq 0$ genau dann in $(0, \ldots, 0{,}1)$ einen t-fachen Punkt hat, wenn dies für $g = 0$ der Fall ist. $(N > k + t)$.

Ist $f(u_o, \ldots, u_n) = 0$ wieder eine Hyperfläche k-ten Grades, so betrachten wir die Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung:

$$x_{i_o \ldots i_n} = f(u_o, \ldots, u_n)\, u_o^{i_o} \ldots u_n^{i_n} \quad (i_o + \ldots + i_n = N - k, \qquad (4)$$

wobei rechts alle mit f multiplizierten Monome $N - k$-ten Grades stehen. Dies ist einerseits eine $\overline{V}_n^{N-k}$, wie nach Fortstreichen des gemeinsamen Faktors f zu ersehen ist. Diese $\overline{V}_n^{N-k}$ erscheint aber jetzt nach einer Bemerkung zu Beginn dieses Abschnittes als Projektion der V_n^N; diese selber wird erhalten, wenn man die rechten Seiten von (4) durch Hinzunahme weiterer Gleichungen und Koordinaten auf den linken Seiten zu einem Basissystem aller Polynome N-ten Grades ergänzt. Die zu (4) hinzukommenden Gleichungen mögen dann

$$x_{i_o \ldots i_n j} = h_{i_o \ldots i_n}(u_o, \ldots, u_n) \quad (i_o + \ldots + i_n + j = k;\ j \leqslant k - 1) \qquad (5)$$

lauten. Das „Auge" oder Zentrum der Projektion wird durch Nullsetzen der linken Seiten von (4) beschrieben, ist also ersichtlich der f im $\langle V_n^N \rangle$ zugeordnete Raum $L^N(f)$. Es ist interessant, diese Projektion in folgendem Satz etwas genauer zu verfolgen:

Satz 6. Bei der Projektion einer V_n^N in eine $\overline{V}_n^{N-k}$ aus einem Raum $L^N(f)$, wobei $f = 0$ eine gegebene Hyperfläche k-ten Grades des Parameterraumes ist, geht folgendes ineinander über:

a) Ein $T^{(t)}$ $(t < N - k)$ in einem nicht auf $L^N(f)$ gelegenen Punkt P der V_n^N in den $\overline{T}^{(t)}$ der $\overline{V}_n^{N-k}$ im Bildpunkt $\overline{P}$ von P,

b) Ein $T^{(t)}$ in einem Punkt $P(a_o, \ldots, a_n)$ der V_n^N in den $\overline{T}^{t-s-1}$ eines Punktes $\overline{P}$ der $\overline{V}_n^{N-k}$, wenn $(a_o, \ldots, a_n)$ für $f = 0$ genau s-fach, aber nicht $s + 1$-fach ist $(N > t \geqslant s + 1)$.

Beweis: Der zu untersuchende Punkt P der V_n^N habe die Parameter $(0, \ldots, 0{,}1)$. Dann sei zuerst:

a) $f(0, \ldots, 0{,}1) \neq 0$. Nach der zusätzlichen Bemerkung zu Satz 5 ist der $T^{(s)}$ von P zum Projektionszentrum $L^N(f)$ windschief, wird

also wieder in einen Raum von ebensoviel Dimensionen projiziert; daß dies der $\overline{T}^{(s)}$ der $\overline{V}_n^{N-k}$ im Punkte $\overline{P}$ mit den Parametern $(0, \ldots, 0,1)$ ist, folgt so: Dieser $\overline{T}^{(s)}$ wird einerseits durch

$$x_{i_0 \ldots i_n k} = 0 \,(i_n \leqq N-k-s-1;\; i_0 + \ldots + i_n = N-k \qquad (6)$$

$$x_{i_0 \ldots i_n j} = 0 \;\; (j \leqq k-1) \qquad (7)$$

definiert. Der $T^{(s)}$ wird anderseits durch ein System beschrieben, wozu man wegen $f(0, \ldots, 0,1) \neq 0$ die Gleichungen (6) und noch einige weitere, hier nicht interessierende, nehmen kann. Die Hyperebenen (6) gehen aber auch durch $L^N(f)$ und schneiden sich in einem Raum von $\binom{n+N}{N} - \binom{n+N-k}{N-k} + \binom{n+s}{s} - 1$ Dimensionen, der somit nichts anderes als der durch $L^N(f)$ und $T^{(s)}$ oder $L^N(f)$ und $\overline{T}^{(s)}$ aufgespannte, projizierende Raum von $T^{(s)}$ sein kann.

b) Jetzt mögen für $(0, \ldots, 0,1)$ alle Ableitungen von f bis zur $s-1$-ten, aber nicht alle s-ten verschwinden. Der $\overline{T}^{(t-s-1)}$ an die $\overline{V}_n^{N-k}$ im Punkte hat nun die Gleichungen:

$$x_{i_0 \ldots i_n k} = 0 \,(i_n \leqq N-k-t+s) \qquad (8)$$

$$x_{i_0 \ldots i_n j} = 0 \;\; (j \leqq k-1). \qquad (9)$$

Bildet man anderseits das Gleichungssystem für die $T^{(t)}$ der V_n^N im Punkte $(0, \ldots, 0,1)$, so sieht man, daß hierunter das Teilsystem (8) vorkommt; denn infolge der Voraussetzung müssen in jedem Polynom $f.g$ vom Grade N, bei dem in $(0, \ldots, 0,1)$ alle Ableitungen bis zur t-ten verschwinden, für den Faktor g alle Ableitungen bis zur $t-s-1$-ten gleich Null werden. Das bedeutet aber, der $T^{(t)}$ ist in dem durch (8) festgelegten Raum von $\binom{n+N}{N} - \binom{n+N-k}{N-k} + \binom{n+t-s-1}{t-s-1} - 1$ Dimensionen enthalten. Dieser Raum wird einerseits durch $L^N(f)$ und $\overline{T}^{(t-s-1)}$ aufgespannt, anderseits nach Satz 5 aber auch durch $L^N(f)$ und $T^{(t)}$, wie die Dimensionenzahl besagt. Damit ist aber alles gezeigt.

Die hiermit gewonnenen Erkenntnisse kann man zweckmäßig dazu anwenden, um sich eine deutlichere Vorstellung von den einer mehrfach zählenden Hyperfläche des U_n zugeordneten Räumen zu verschaffen. Wir beschränken uns auf den Fall einer k-fach zählenden Hyperebene U_{n-1} des U_n, die einfach gezählt die Gleichung $H = 0$ habe. Für $N \geqq k$ ist dann der k-fach zählenden Hyperfläche k-ten Grades $f = H^k = 0$ ein Raum $L^N(H^k)$ zugeordnet; zunächst sieht man sofort ein, daß $L^N(H^k)$ durch die Gesamtheit aller $T^{(k-1)}$ in den V^N-Bildpunkten von $H = 0$ aufgespannt wird; ebenso spannen für $N > t > k$ die $T^{(t-1)}$ in denselben Punkten den Raum $L^N(h^t)$ auf. Durch Projektion

aus $L^N(h^k)$ geht dann die Gesamtheit aller dieser $T^{(t-1)}$) in die Gesamtheit aller $\overline{T}^{t-k-1}$ in den $\overline{V}^{N-k}$-Bildpunkten derselben Hyperebene über; diese spannen aber wiederum einen Raum $L^{N-k}(H^{t-k})$ innerhalb von $\overline{V}_n^{N-k}$ auf. Wir können dies alles kurz folgendermaßen ausdrücken: Durch den geschilderten Projektionsprozeß hat die ursprünglich t-fach zählende Hyperebene k ihrer Vielfachheiten verloren und erscheint nur noch $t - k$-fach — alles natürlich in den entsprechenden V-Räumen verstanden. Diese Überlegungen werden im § 3 noch von Wichtigkeit sein.

Für das weitere Arbeiten mit diesen Gegenständen ist noch der Begriff der Verlagerung einer im U_n vorgenommenen Projektion aus einem Auge U_b auf einen dazu windschief liegenden Raum $\overline{U}_a$ $(a + b + 1 = n)$ von Bedeutung. Es seien diese beiden Räume je durch Nullsetzen der Koordinaten $u_o, \ldots, u_a$ und $u_{a+1}, \ldots, u_{a+b+1}$ definiert, so daß man die Projektion eines allgemeinen Punktes des U_n durch Nullsetzen der letzten $b + 1$ Koordinaten erhält. Dann definieren die Formeln:

$$x_{i_o \ldots i_a} = u_o^{i_o} \ldots u_a^{i_a} \; (i_o + \ldots + i_a = N) \tag{10}$$

wobei rechts alle Monome N-ten Grades in den $(u_o, \ldots, u_a)$ stehen, eine $\overline{V}_a^N$; diese wird als Projektion einer V_{a+b+1}^N aufgefaßt, deren Gleichungen man erhält, wenn das System (10) zu dem aller Monome N-ten Grades in $(u_o, \ldots, u_a; u_{a+1}, \ldots, u_{a+b+1})$ ergänzt wird. Diese Projektion der V_{a+b+1}^N in die $\overline{V}_a^N$ heiße die V^N-Verlagerung der gegebenen Projektion des U_{a+b+1} auf den $\overline{U}_a$. Man überzeugt sich leicht, daß das Zentrum der verlagerten Projektion im Raume $\langle V_n^N \rangle$ durch die $T^{(N-1)}$ in allen V^N-Bildpunkten von U_b aufgespannt wird.

Wir beweisen nunmehr folgenden Satz, der später für uns von Bedeutung sein wird und der in anderer Formulierung sicher nicht neu ist.

Satz 7. Gegeben seien r beliebige Punkte $P^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, k)$ des U_n und zu jedem $P^{(i)}$ eine zugeordnete ganze Zahl $\sigma_i \geqslant 0$. Dann sind die Schmiegräume $T^{(\sigma_i)}(P^{(i)})$ in den zugeordneten und ebenso benannten r-Bildpunkten der $P^{(i)}$ auf der V_n^N für $N \geqslant \sigma_1 + \ldots + \sigma_r + r$ alle unabhängig voneinander (d. h. jeder ist zu dem von den übrigen aufgespannten Raum windschief).

Beweis: Bei $n = 1$ ist V_1^N eine rationale Normkurve N-ten Grades C^N, und die $T^{(\sigma_i)}$ sind die Schmieg-P_i der einzelnen Punkte. Wir entnehmen nun der Theorie der C^N folgende bekannten Tatsachen:

Ein Schmieg-P_h der C^N kann als der durch $h+1$ benachbarte Punkte aufgespannte Raum angesehen werden; projiziert man die C^N aus einem derartigen Schmieg-P_h, so entsteht eine Normkurve C^{N-h-1}, wobei nach Satz 6 die Schmiegräume $T^{(i)}$ $(i \leqslant N-h)$ in den übrigen Punkten der C^N in solche der C^{N-h-1} übergegangen sind. Hieraus folgt sofort, daß für $N \geqslant \sigma_1 + \ldots \sigma_r + r$ die r Schmieg-$T^{(\sigma_i)}$ einen Raum von $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r + r - 1$ Dimensionen aufspannen, also unabhängig sind. Weiterhin ist die Behauptung leicht in dem Fall einzusehen, wo alle $\sigma_i = 0$ sind. Bei $n = 1$ haben wir sie soeben gesehen, bei $n > 1$ projiziere man die gegebenen r-Punkte des U_n aus einem allgemein gewählten U_{n-2} desselben auf die Gerade und verlagere diese Projektion auf die V_n^N, wobei aus der V_n^N eine C^N geworden ist, auf der die r durch Projektion entstandenen Punkte, wie wir wissen, unabhängig sind, also sind die r Punkte auf der V_n^N es ebenfalls. Nunmehr sei die Richtigkeit der Behauptung bis zu $n-1$ und für solche zugeordneten σ_i mit $\max \sigma_i = \sigma - 1$ schon bewiesen. Es sei jetzt $\max \sigma_i = \sigma$; der Punkt S außerhalb derselben im U_n werde dann so gewählt, daß die r gegebenen Punkte von S aus in r verschiedene Punkte des U_{n-1} projiziert werden. Bei der V^N-Verlagerung dieser Projektion werden die V^N-Bilder dann aus dem Schmiegraum T^{N-1} des Bildes von S auf die V_{N-1}^N projiziert. Ein Schmiegraum $T^{(\sigma_i)}(P^{(i)})$ schneidet nun nach Satz 3 aus $T^{(N-1)}(S)$ einen $T^{(\sigma_i-1)}$ an die in $T^{(N-1)}(S)$ gelegene ausgezeichnete V_n^{N-1} aus, bzw. liegt bei $\sigma_i = 0$ außerhalb von $T^{(N-1)}(S)$; nach Induktionsannahme sind diese so ausgeschnittenen r Räume $T^{(\sigma_i-1)}$ unabhängig voneinander. Weiterhin gehen die $T^{(\sigma_i-1}(P^{(i)})$ bei der verlagerten Projektion in die $T^{(\sigma_i)}$ in r Punkte einer V_{n-1}^N über, auf die sich wieder die Induktionsvoraussetzung anwenden läßt. Hieraus ergibt sich aber die Richtigkeit der Behauptung für den vorliegenden Fall im $\langle V_n^N \rangle$.

§ 2. Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Durchschnitt von Hyperflächen.

Grundlegende Bedeutung für die algebraische Geometrie haben die homogenen Polynomideale mit Nullstellen. Man weiß, daß ein solches Ideal $\mathfrak{J}$ eine endliche Basis besitzt und daß seine Nullstellenmenge $\mathfrak{M}$ aus endlich vielen algebraischen Mannigfaltigkeiten von möglicherweise verschiedener Dimension besteht. Unter allen Idealen mit derselben Nullstellenmenge $\mathfrak{M}$ gibt es ein umfassendstes. Um den Anschluß an

unsere Betrachtungen zu gewinnen, beachte man, daß alle Polynome eines festen Grades N, die in $\mathfrak{J}$ enthalten sind, ein Linearsystem bilden. Damit kann man $\mathfrak{J}$ in jedem Raum V_n^N für $N \geqslant a$, wo a der kleinste Grad eines in $\mathfrak{J}$ vorkommenden Polynoms ist, einen Teilraum $D^N(\mathfrak{J})$ zuordnen, der die V^N-Bilder der Punkte von $\mathfrak{M}$ gewiß enthält. Wir interessieren uns dabei nur für die Räume $D^N(\mathfrak{J})$ mit $N > k$, wobei k der höchste Grad ist, der in der Basis $(f_1, \ldots, f_m)$ von $\mathfrak{J}$ vorkommt. $D^N(\mathfrak{J})$ ist dann der Durchschnitt aller im vorigen Abschnitt eingeführten Räume $D^N(f_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Es ist dann sinngemäß folgendes zu definieren:

Die endliche Menge $\mathfrak{M}$ algebraischer Mannigfaltigkeiten — oder Mannigfaltigkeitsbund nach A. Weil — wird durch die m Hyperflächen höchsten k-ten Grades $f_1, \ldots, f_m$ rein und vollständig dargestellt wenn die f_i eine Basis des Ideals $\mathfrak{J}'$ aller auf $\mathfrak{M}$ verschwindenden Polynome sind oder anders ausgedrückt, wenn die Räume $L^N(f_i)$ den Raum $\langle V^N(\mathfrak{M})\rangle$ als Durchschnitt besitzen $(N \geqslant k)$.

Es ist nun aber auch möglich, daß die Räume $L^N(f_i)$ einen höheren Raum als Durchschnitt besitzen als $\langle V^N(\mathfrak{M})\rangle$, aber dennoch aus V_n^N nicht mehr ausschneiden als die V^N-Bilder der Menge $\mathfrak{M}$. In diesem Fall sagen wir: die f_i stellen $\mathfrak{M}$ nicht mehr vollständig dar. Dabei ist aber eine weitere Unterscheidung zu treffen, die wir erst an zwei ganz einfachen Beispielen erläutern wollen. Der einfacheren Formulierung wegen beschränken wir uns von jetzt an auf den Fall, wo $\mathfrak{M}$ eine, nicht notwendig irreduzible Mannigfaltigkeit M_d von d Dimensionen ist.

Als erstes Beispiel sei M_0 in der Ebene U_2 das Paar der beiden Punkte mit den Koordinaten (0, 0,1) und (0,1,0). Das V^2-Bild von M_0 wird durch eine Sehne S_1 aus der Veroneseschen Fläche V_2^2 ausgeschnitten, und man sieht sofort, daß M_0 durch

$$u_0 = 0, \; u_1 u_2 = 0 \tag{1}$$

im Sinne obiger Definition rein und vollständig dargestellt wird. Statt durch (1) kann M_0 aber auch durch den Schnitt folgender Geradenpaare dargestellt werden:

$$u_0^2 = 0, \; u_0 u_1 = 0, \; u_1 u_2 = 0 \tag{2}$$

$$u_0^2 = 0, \; u_1 u_2 = 0, \; u_0 (u_1 + u_2) = 0. \tag{3}$$

Beide Systeme haben als Nullstellen nur die Punkte (0, 0,1) und (0,1, 0), unterscheiden sich jedoch in folgendem: Das zu (2) gehörige Kegelschnittnetz enthält ∞^1 Geradenpaare mit (0, 0,1) als Doppelpunkt,

dagegen nur ein Geradenpaar mit (0,1, 0) als Doppelpunkt, das ist die Doppelgerade $u_0^2 = 0$; das System (3) enthält jedoch von beiden Teilsystemen nur ein Exemplar, die Doppelgerade $u_0^2 = 0$. Auf den Raum $\langle V_2^2 \rangle$ übertragen besagt dies: (2) ist eine Ebene im $\langle V_2^2 \rangle$ zugeordnet, die aus der V_2^2 die beiden (0, 0,1) und (0,1, 0) entsprechenden Punkte ausschneidet, mit der Tangentialebene $T_2^{(1)}$ im ersten Punkt jedoch noch eine Tangente gemeinsam hat, während die zu (3) gehörige Ebene die Tangentialebenen in beiden fraglichen Punkten nur in ihren Berührungspunkten schneidet. Man sagt auch, die Kegelschnitte des ersten Systems (2) haben noch einen zu (0, 0,1) benachbarten Punkt zusätzlich gemeinsam, während das bei dem System (3) nicht der Fall ist; wir werden sagen, (3) stellt die beiden Punkte rein, wenn auch nicht mehr vollständig, (2) dagegen unrein dar. Bevor wir aber diese Unterscheidung allgemein formulieren können, müssen wir zunächst in Erweiterung von Satz 4 angeben, wie sich reguläre und singuläre Punkte einer M_d nach unserer Auffassung unterscheiden.

Satz 8. Ein Punkt P einer M_d ist regulär, wenn der Raum $\langle V^N(M_d) \rangle$ für hinreichend großes N aus dem $T_n^{(1)}$ des V^N-Bildes von P genau einen P_d ausschneidet, in allen übrigen Fällen ist P singulär.

Beweis: M_d sei durch die m Hyperflächen $f_1, \ldots, f_m$ höchstens k-ten Grades rein und vollständig dargestellt. Dann heißt ein Punkt P aus M_d bekanntlich dann regulär, wenn die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$ in ihm den Rang $n - d$ besitzt. P habe die Koordinaten $(0, \ldots, 0,1)$, und die Numerierung sei so gewählt, daß die Rangbedingung für die ersten $n - d$ Hyperflächen $f_1, \ldots, f_{n-d}$ bereits erfüllt ist. Diese f_i seien ferner durch eventuelle Multiplikation mit einer Potenz von u_n auf den gemeinsamen Grad k gebracht. Dann müssen in $f_1, \ldots, f_{n-d}$ die Faktoren von u_n^k verschwinden, und die Rangbedingung muß für die Matrix der Koeffizienten der $u_i\, u_n^{k-1}$ $(i = 0,1, \ldots, n-1)$ erfüllt sein. Eine Übertragung auf den $\langle V_n^N \rangle$, in dem sich der $T_n^{(1)}$ in dem fraglichen Punkt gerade durch Nullsetzen aller Koordinaten außer $x_{i_0 \ldots i_{n-1}\, N-1}$ und $x_{0 \ldots 0\, N}$ beschreiben läßt, ergibt dann unmittelbar die Behauptung, auch in umgekehrter Richtung.

M_d besitzt dann in einem Punkte P folgendes Verhalten: Für hinreichend große N enthält der Raum $\langle V^N(M_d) \rangle$ alle Schmiegräume im Bildpunkt von P bis einschließlich $T^{(s)}$, mit $T^{(s+1)}$ hat er jedoch nur einen P_r mit $r < \binom{n+s+}{s+1} - 1$ gemein. Kennzeichnend für das Ver-

halten von M_d in P sind somit in erster Näherung die beiden Zahlen s und r, wobei nach Satz 8 $s = 0$ und $r = d$ Regularität bedeutet. Daraufhin definieren wir, im Einklang mit unseren Beispielen: Ein durch $\langle V^N(M_d)\rangle$ gehender Raum P_h des V_n^N schneidet die Menge $V^N(M_d)$ rein aus der V_n^N aus, wenn der P_h in jedem Punkt von $V^N(M_d)$ dasselbe, durch die obigen Zahlen s und r beschriebene Verhalten zeigt wie der Raum $\langle V^N(M_d)\rangle$. Jeder andere P_h, der aus V_n^N auch nur die Bildpunkte von M_d ausschneidet, aber nicht überall diese Bedingung erfüllt, heiße unreiner Schnitt. Diese Bezeichnungen übertragen sich auch auf jedes System von endlich vielen Hyperflächen f_i, deren zugeordnete Räume $L^N(f^i)$ genau P_h als Durchschnitt besitzen. Ein oft bewiesener und benutzter Satz, den wir jedoch nur für singularitätenfreie M_d formulieren, ist dann folgender:

Satz 9. Eine singularitätenfreie M_d des P_n läßt sich stets als reiner Schnitt von höchstens $n + 1$ Hyperflächen gleichen Grades darstellen.

Beweis: Der Raum $\langle V^k(M_d)\rangle$ habe die Dimension $\binom{n+k}{k} - m - 1$, so daß die M_d sich durch m Hyperflächen k-ten Grades rein und vollständig darstellen läßt. Es sei $m > n + 1$; dann projiziere man die ganze V_n^k aus $\langle V^k(M_d)\rangle$ in einen $\overline{P}_{m-1}$. Dabei werde aus der V_n^k eine $\overline{W}_{n'}$ mit $n' \leqslant n$, fernerhin entsteht aus den ∞^d $T_n^{(1)}$ in den einzelnen Punkten der $V^k(M_d)$ eine durch ∞^d Räume T_{n-d-1} erzeugte $\overline{U}_{n''}$, deren Dimension n'' jedenfalls nicht größer als $n - 1$ ist. In Wirklichkeit ist $n' = n$, $n'' = n - 1$ und $\overline{U}$ liegt auf $\overline{W}_n$, jedoch benötigen wir das hier nicht. Es ist jedenfalls stets möglich, im $\overline{P}_{m-1}$ einen $\overline{P}_{m-n-2}$ zu finden, der mit $\overline{W}_{n'}$ und $\overline{U}_{n''}$ keinen Punkt gemein hat. Durch Verbindung von $\overline{P}_{m-n-2}$ mit dem Projektionszentrum $\langle V^k(M_d)\rangle$ ergibt sich dann ein $P_{\binom{n+k}{k}-n-2}$ des $\langle V_n^k\rangle$, der die gewünschte Eigenschaft hat, aus V_n^k nur die Punkte von $V^k(M_d)$ auszuschneiden und mit den $T_n^{(1)}$ in den fraglichen Punkten nur die Tangential-P_d von $V^k(M_d)$ gemein zu haben. Diesem $P_{\binom{n+k}{k}-n-2}$ ist aber wiederum im U_n der M_d ein Linearsystem von ∞^n Hyperflächen k-ten Grades zugeordnet; $n + 1$ linear unabhängige Hyperflächen aus diesem System leisten das Gewünschte.

Bemerkung 1. Nach einem Satz von *Severi*[2] ist es möglich, bei $n > 2d$ die M_d auch als Schnitt von $n + 1$ singularitätenfreien Hyperflächen darzustellen. Um dies auf unserem Wege einzusehen, müssen wir folgende Frage beantworten: Kann man die $n + 1$ Hyperebenen, durch

[2] *Severi*

deren Schnitt man den in obigem Beweis auftretenden $P_{\binom{n+k}{k}-n-2}$ festlegt, auch so wählen, daß sie keinen der ∞^n $T_n^{(1)}$ der V_n^k enthalten? Das bedeutet aber, im $\overline{P}_{m-1}$, auf den oben alles projiziert war, Hyperebenen zu finden, die erstens keinen P_n aus einer gewissen Menge von $\infty^n P_n$ enthalten und zweitens keinen P_{n-d-1} aus einer Menge von $\infty^d P_{n-d-1}$ (herrührend von den $T_n^{(1)}$ längs $V^k(M_d)$). Ins Duale übersetzt, bedeutet dies aber, Punkte im $\overline{P}_{m-1}$ zu finden, die erstens nicht auf einer gewissen Gesamtheit von $\infty^n P_{m-n-2}$ liegen, d. h. höchstens eine Hyperfläche vermeiden und zweitens nicht auf einer Gesamtheit von $\infty^d P_{m-n+d-1}$ liegen dürfen. Diese letzgenannte Gesamtheit bildet aber bei $n>2d$ mit Sicherheit ebenfalls höchstens eine Hyperfläche.

Bemerkung 2. Der Severische Satz, von dem eben die Rede war, läßt sich auch auf den Fall ausdehnen, wo M_d zwar Singularitäten besitzt, aber nur solche von der Art, daß nicht alle Hyperflächen durch M_d in dem betreffenden Punkt eine Singularität haben müssen. Auf den Beweis hierfür, der sich leicht erbringen läßt, sei verzichtet.

Wir behandeln schließlich noch als Beispiel für die Begriffsbildungen dieses Abschnittes die Vahlensche Quintik des P_3. Diese Kurve C^V ist rational und besitzt eine einzige Quadrisekante. C^V kann nicht durch Flächen dritten Grades allein dargestellt werden, da jede derselben die Quadrisekante mit enthalten muß. Dagegen ist eine Darstellung als vollständiger Schnitt von Flächen vierten Grades möglich. Bei *Perron*[3] sind Flächen fünften Grades gewählt worden, was wir hier auch machen wollen. Es ist nun die Kurve $V^5(C^V)$ eine rationale Normkurve C^{25}, was wir hier unbewiesen übernehmen wollen (daß die $V^5(C^V)$ die Ordnung 25 hat folgt aus dem Satz 10 des nächsten Abschnittes). Bei der Projektion der V_3^5 des P_{55} aus dem Raum $V^5(C^V)$ entsteht eine M_3 des P_{29}, auf der eine Regelfläche M_2 ausgezeichnet ist, die von den ∞^1 Tangential-$T_3^{(1)}$ an die V_3^5 in den Punkten der C^{25} herrührt. Irgendwelche 3 Flächen fünften Grades durch C^V bestimmen einen P_{52} des $\langle V_3^5\rangle$, der durch die erwähnte Projektion in einen P_{26} übergeht. Aus Dimensionsgründen kann dieser P_{26} zur obigen M_3 nicht völlig fremd sein, auch wenn es sich erreichen läßt, daß er M_3 außerhalb der darin ausgezeichneten M_2 nicht trifft. Damit ist aber gezeigt, daß es nicht möglich ist, die Vahlensche C^V als Schnitt von 3 Flächen fünften Grades rein darzustellen.

---

[3] *Perron*, Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von *Kronecker*, Math. Ztschr. 47 (1941), S. 318–324.

§ 3. Spezieller Bézoutscher Satz und idealtheoretischer Multiplizitätsbegriff.

Wir beginnen die Betrachtungen dieses Abschnittes mit dem speziellen Bézoutschen Satz, der es mit n Hyperflächen des P_n zu tun hat, die sich in endlich vielen Punkten schneiden. Der erste Teil dieses Satzes besteht in der Aussage, daß die Anzahl dieser Schnittpunkte nicht größer als das Produkt der Grade der Hyperflächen ist. Diese Aussage ergibt sich, wenn man Bescheid weiß, wie sich Grade von Mannigfaltigkeiten bei der V-Transformation verändern. Darüber gilt:

Satz 10. Wenn eine Mannigfaltigkeit M_d die Ordnung r hat, dann hat die Transformierte $V^k(M_d)$ die Ordnung $k^d.r$.

Beweis: Wenn man sagt, M_d habe die Ordnung r, so bedeutet dies, ein allgemeiner P_{n-d} des von der M_d aufgespannten P_n hat mit M_d genau r verschiedene Punkte gemeinsam. Ferner ergibt eine leichte Konstantenzählung und Stetigkeitsbetrachtung, daß jeder P_{n-d}, der keinen singulären Punkt und keine Tangente von M_d enthält, auch wirklich r verschiedene Punkte mit M_d gemein hat. Wir gehen nun zur $V^k(M_d)$ über und wollen den Satz induktiv beweisen. Da er für $d = 0$ nur eine Trivialität aussagt, sei zu Beginn $d=1$ angenommen. Die Ausgangskurve M_1 werde mit k verschiedenen Hyperebenen $P^{(1)}_{n-1}$, $P^{(2)}_{n-1}, \ldots, P^{(k)}_{n-1}$ geschnitten, die nur so zu wählen sind, daß jede von ihnen r verschiedene Punkte mit M_1 gemein hat, und zwar so, daß die $r.k$ Schnittpunkte aller k Hyperebenen alle verschieden sind. Dann stellt das Produkt der k Hyperebenen eine entartete Hyperfläche k-ter Ordnung dar, der im $\langle V^k_n \rangle$ eine Hyperebene $H_{\binom{n+k}{k}-2}$ zugeordnet ist. Diese Hyperebene schneidet aus V^k_n insgesamt k Veronesesche $V^{k(i)}_{n-1}$ $V^{k(i)}_{n-1}$ aus $(i=1, \ldots, k)$, wobei $V^{k(i)}_{n-1} = V^k(P^{(i)}_{n-1})$ ist. Ferner hat H die Eigenschaft, nur solche Tangenten der V^k_n zu enthalten, die bereits Tangente an eine der $V^{k(i)}_{n-1}$ oder Tangente an die V^k_n in einem gemeinsamen Punkt zweier $V^{k(i)}_{n-1}$ sind. Infolge unserer Voraussetzung über die Schnitte von M_1 mit den P^i_{n-1} ergibt sich dann aber, daß H die V^k_n genau in $k.r$ Punkten schneidet und auch keine Tangente oder etwaigen singulären Punkt von $V^k(M_1)$ enthält. Somit hat $V^k(M_1)$ die Ordnung $k.r$. Angenommen, die Behauptung wäre bereits für alle M_δ mit $\delta \leqslant d-1$ bewiesen; die gegebene M_d werde dann mit einer in k Hyperebenen zerfallenden Hyperfläche k-ten Grades geschnitten. Diese k Hyperebenen sind nur so allgemein zu wählen, daß sie je aus M_d eine M_{d-1} der genauen Ordnung r ausschneiden. Nach Induktionsannahme haben dann die entsprechenden $V^k(M_{d-1})$ sämtlich die Ordnung

$r.k^{d-1}$, woraus sich sofort ergibt, daß $m.k^d$ die Ordnung der Mannigfaltigkeit $V^k(M_d)$ ist.

Bemerkung. Die V_n^k selber hat die Ordnung n^k. Dies ergibt sich, wenn man für die M_d des vorigen Satzes einen P_n nimmt.

Nunmehr ergibt sich leicht die Bézoutsche Ungleichung:

Satz 11. n Hyperflächen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des P_n der Grade $g_1, g_2, \ldots, g_n$ schneiden sich, wenn sie nur isolierte Schnitte besitzen, in höchstens $g_1 \cdot g_2 \ldots g_n$ verschiedenen Punkten.

Beweis: Zunächst sei $n = 2$ angenommen. Dann ist die Aussage des Satzes gleichwertig damit, daß die Kurve $V^{g_1}(f_1)$ die Ordnung $g_1 \cdot g_2$ hat. Dies wissen wir aber bereits nach Satz 10. Man kann daher induktiv annehmen, daß für alle Dimensionszahlen bis zu $n-1$ der Satz schon gezeigt sei und daher auch die Schnittkurve C von $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ eine Ordnung $g \leqslant g_1 \ldots g_{n-1}$ besitzt. Den Schnitt von C mit f^n bestimmen, bedeutet nun dasselbe wie die Kurve $V^{g_n}(C)$ mit einer Hyperebene des $\langle V_n^g \rangle$ schneiden, d. h. ihre Ordnung bestimmen. Diese ist aber nach Satz 10 gleich $g.g_n$, womit alles gezeigt ist.

Ist die Anzahl der Schnittpunkte geringer als das Produkt der Grade, so hat man jeden derselben mit einer bestimmten Vielfachheit zu versehen, derart daß die Summe der Vielfachheiten wieder gleich dem Produkt der Gradzahlen ist. Wir werden auch von unserem Standpunkt aus eine Vielfachheit definieren, und zwar nicht nur für den Fall von n, sondern allgemein $m \geqslant n$ Hyperflächen des P_n, die sich isoliert schneiden. Diese Definition wird dieselbe sein, wie diejenige, die man auf dem Boden der Idealtheorie rein algebraisch erklären kann[4], d. h. sie wird nur im Falle des Schnittes von n Hyperflächen mit der von Severi und van der Waerden erklärten übereinstimmen und somit auch nur mit dem speziellen Bézoutschen Satz in Einklang stehen.

Wir behandeln der Reihe nach erst einige ganz einfache Spezialfälle, an denen die Verhältnisse besonders klar sind, und die uns von selber zu der allgemeinen Definition führen werden.

a) Zuerst werde der Schnitt mehrerer nulldimensionalen Mannigfaltigkeiten auf der Geraden betrachtet. Solche Gebilde werden durch Nullsetzen binärer Formen definiert. Nun ist einer binären Form h-ten Grades, deren h Nullstellen zu je $s_1, \ldots, s_t$ zusammenfallen mögen ($s_1 + s_2 + \ldots + s_t = h$), im $\langle V_1^N \rangle$, der der Raum einer rationalen Normkurve C^N ist, für $N \geqslant h$ ersichtlich ein P_{h-1} zugeordnet,

[4] s. Anm. 1

er durch die Schmieg-$T^{(s_i-1)}$ $(i = 1, \ldots, t)$ von den Dimensionen $_i - 1$ in gewissen t verschiedenen Punkten der C^N aufgespannt wird. Hat man nun m verschiedene binäre Formen f_i der Grade g_i, die jedoch enau jene t Nullstellen mit den Vielfachheiten s_i gemein haben, so ilt folgendes: Für $N \geqslant \max g_i$ haben die Räume $L^N(f_i)$ als genauen Schnitt obigen P_{h-1}. Die Vielfachheiten s_i erscheinen als die um 1 erminderten Dimensionen der Schmiegräume in den t gemeinsamen unkten.

b) f sei jetzt eine beliebige ebene Kurve h-ten Grades und G eine Gerade die nur kein Bestandteil von $f = 0$ sein soll, sondern f in t erschiedenen Punkten schneide. Der Schnitt von $L^N(f)$ mit der Normkurve $V^N(G)$ ist dann für $N \geqslant h$ ein P_{h-1}, der von der Art ist, wie wir hn unter a) soeben beschrieben haben; er wird also durch gewisse Schmiegräume $T^{(s_i-1)}$ an die $C^N = V^N(G)$ aufgespannt, und die um ins vermehrten Dimensionen dieser $T^{(s_i-1)}$ geben die Vielfachheiten ler t Schnittpunkte von f und G an.

Dasselbe gilt aber auch, wenn man G nicht nur mit f allein, sondern mit m Kurven $f_1, \ldots, f_m$ zu schneiden hat, wobei aber dieselben, je $_i$-fach zu zählenden Schnittpunkte zwischen G und den f_i vorliegen. Für N, die größer als das Maximum der Grade der f_i sind, haben die $n + 1$ Räume $L^N(f_i)$ und $L^N(G)$ einen Durchschnitt D_{n-1} von der Dimension $h - 1 = s_1 + s_2 + \ldots + s_t - 1$, der t voneinander unabhängige Räume P_{s_i-1} in t Punkten der C^N genau aufgespannt wird. Diese P_{s_i-1} sind nun offensichtlich in den $T^{(s_i)}$ der entsprechenden Punkte der V_2^N, an der sich alles abspielt, enthalten. Daher können wir auch sagen: Der Durchschnitt von D_{h-1} mit dem Schmieg-$T^{(s_i)}$ m V^N-Bild des i-ten Schnittpunktes von G mit den f_i ist ein P_{s_i-1}; ür hinreichend großes N ist auch $D_{h-1} \cap T^{(s_i+1)}(P_i) = P_{s_i-1}$, d. h. D_{h-1} dringt in den Schmiegraum der nächst höheren Stufe $T^{(s_i+1)}$ von $P^{(i)}$ auch nicht tiefer ein als in $T^{(s_i)}(P^{(i)})$.

c) Unter denselben Voraussetzungen wie unter b) werde jetzt das System der ebenen Kurven (f_i) mit der a-fach zählenden Geraden G, die G^a genannt werde, geschnitten $(a > 1)$. Dann erwarten wir als Vielfachheiten in den gemeinsamen t Punkten $P^{(i)}$ auf G jetzt die Zahlen $a.s_i$; für $a = 1$ wissen wir nun nach b) bereits, daß der Durchschnitt D^N der Räume $L^N(G^a)$ und $L^N(f_i)$ für hinreichend großes N durch die Schnitte der Schmiegräume in den t Punkten $P^{(i)}$ mit D^N aufgespannt wird. Angenommen, dies wäre bereits bis $a - 1$ bewiesen.

Dann projiziere man die V_2^N aus dem durch $C^N = V^N(G)$ aufgespannten Raum $L^N(G)$; nach Satz 6 wird dabei aus der V_2^N eine $\overline{V}_2^{N-1}$, und der durch $L^N(G)$ gehende Raum $L^N(G^a)$ geht dabei in einen $L^{N-1}(G^{a-1})$ über, entsprechend die anderen Räume $L^N(f_i)$ in $L^{N-1}(f_i)$.

Nach Induktionsannahme wird der Schnitt

$$\overline{D} = L^{N-1}(f_1) \cap \ldots \cap L^{N-1}(f_m) \cap L^{N-1}(G^{a-1})$$

durch t Räume von den Dimensionen $(a-1)\,s_i$ $(i = 1, \ldots, t)$, die sogenannten Multiplizitätskomponenten, die $\overline{D}$ mit den Schmiegräumen $T^{(s_i+a-1)}$ der Punkte $\overline{P}^{(i)}$ gemein hat, aufgespannt ($\overline{P}^{(i)}$ sind die Projektionen der $P^{(i)}$). Nun entstehen aber, gleichfalls nach Satz 6, bei unserer Projektion die $T^{(s_i+a-1)}$ der Punkte $\overline{P}^{(i)}$ aus den $T^{(s_i+a)}$ in den $P^{(i)}$. Zusammen mit dem, was wir nach b) für $a = 1$ bereits wissen, ergibt sich dann, daß der Durchschnittsraum $D^N = L^N(f_1) \cap \ldots \cap L^N(f_m) \cap L^N(G^a)$ genau durch t Räume von den Dimensionen $a.s_i$, die Durchschnitte von D mit den $T^{(s_i+a)}$ in den Punkten $P^{(i)}$ aufgespannt wird.

d) Der soeben behandelte Fall c) werde noch dahingehend verallgemeinert, daß nicht nur eine a-fach zählende, sondern mehrere, durch den Punkt S gehende Gerade $G_1, \ldots, G_p$ zu betrachten sind, wobei G_i a_i-fach zu zählen ist, so daß ein eindimensionaler Kegel $K = G_1^{a_1} \ldots G_p^{a_p}p$ mit der Spitze S von der Ordnung $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ vorliegt. Keine Gerade G_i sei ferner Bestandteil einer Kurve f_j. Wir nehmen dann K zu dem von den f_i erzeugten Ideal hinzu und erhalten so das Ideal $\mathfrak{J} = (K, f_1, \ldots, f_m)$, von dem wir annehmen, daß es nur isolierte Nullstellen besitzt, unter denen S nicht vorkommt. N sei weiterhin im folgenden von selbst stets als hinreichend groß angenommen (eine Schranke für N anzugeben, wäre nicht schwer). Im $\langle V_2^N \rangle$ gehört dann zum Ideal $\mathfrak{J}$ ein V^N-Basisraum D. Unter c) haben wir soeben gesehen, daß bei $p = 1$ dieser D durch seine dort erklärten Multiplizitätsbestandteile in den Punkten $P^{(i)}$ aufgespannt wird. Angenommen, dies wäre bis zu $p-1$ richtig. Dann projiziere man die V^N aus dem Raum $L^N(G_1^{a_1})$ in die $\overline{V}_2^{N-a_1}$. Nach Satz 6, bzw. in leichter Folgerung daraus gehen dabei die Räume $L^N(G_i^{a_i})$ $(i = 2, \ldots, p)$ und $L^N(f_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ in die im $\langle \overline{V}_2^{N-a_1} \rangle$ erklärten Räume $L^{N-a_1}(G_i^{a_i})$ und $L^{N-a_1}(f_j)$ über, und D in einen Raum $\overline{D}$, der jedenfalls im Durchschnitt D' der $L^{N-a_1}(G_i^{a_i})$ und $L^{N-a_1}(f_j)$ enthalten ist. Nach Induktionsannahme weiß ich, daß D' durch die Multiplizitätsbestandteile in den $L^{N-a_1}(G_i^{a_i})$ $(i=2, \ldots, p)$ aufgespannt wird. Weiterhin wissen wir nach Satz 6, daß die in

D enthaltenen Multiplizitätsbestandteile, die zu Schnittpunkten auf den $V^N(G_i^{a_i})$ $(i = 2, \ldots, p)$ gehören, zum Projektionszentrum $L^N(G_1^{a_1})$ windschief sind; sie werden also ohne Dimensionsänderung in die entsprechenden Bestandteile im $\langle \overline{V}_2^{N-a_1} \rangle$ projiziert. Daraus folgt aber, daß $D' = \overline{D}$ ist und auch der Raum D ganz durch seine Multiplizitätsbestandteile aufgespannt wird.

Bevor wir die durch diese Beispiele angeregte Vielfachheitsdefinition allgemein formulieren, benötigen wir noch folgenden:

Satz 12. Seien m Hyperflächen $f_1, \ldots, f_m$ des P_n gegeben $(m \geqq n+1)$, die keinen Punkt gemein haben, so gibt es eine nur von den Graden der f_i abhängige Zahl N_1, so daß für alle $N \geqq N_1$ die Räume $L^N(f_i)$ keinen Punkt gemein haben. Seien ferner $f_1, \ldots, f_m$ $(m \geqq n)$ m Hyperflächen des P_n, die nur endlich viele Schnittpunkte besitzen, so gibt es eine nur von den Graden der f_i abhängige ganze Zahl N_2, so daß für alle $N \geqq N_2$ die Räume $L^N(f_i)$ sich in einem Raum von fester Dimensionenzahl schneiden.

Beweis: Der erste Teil des Satzes, für den es offenbar genügt, $m = n+1$ anzunehmen, ist gleichbedeutend mit dem bekannten Satz der Idealtheorie, daß in dem von den f_i erzeugten Polynomideal von einem bestimmten Grad ab sämtliche Polynome vorkommen[5]. Wir übernehmen diese Tatsache aus der Idealtheorie, ohne sie im Rahmen unserer Betrachtungen neu zu beweisen, was man auch könnte.

Der zweite Teil des Satzes ergibt sich folgendermaßen: $f_1, \ldots, f_m$ mögen nur endlich viele Schnittpunkte und zu je zweien keine gemeinsamen Bestandteile besitzen, was man durch eventuellen Übergang zu einer anderen Basis des Ideals (f_i) stets erreichen kann. Dann nehme man außerdem eine Hyperebene H_{n-1} des P_n hinzu, die keinen der Schnittpunkte der f_i enthält. H_{n-1} schneide f_i in h_i und sei ferner noch so allgemein gewählt, daß die h_i zu je zweien auch keine gemeinsamen Bestandteile haben. Nach dem ersten Teil des Satzes existiert dann eine Zahl N_1, so daß für $N \geqq N_1$ die m Räume $L^N(h_j)$ keinen Punkt gemein haben. N_1 sei ferner größer als das Produkt der Grade der f_i gewählt, so daß man für $N \geqq N_1$ von einem Raum $L^N(f_1 \ldots f_m)$ sprechen kann, der aus $L^N(H_{n-1})$ den Raum $L^N(h_1 \ldots h_m)$ ausschneidet. $L^N(h_1 \ldots h_m)$ wird nach Satz 1 durch die Räume $L^N(h_i) = L^N(H_{h-1}) \cap L^N(f_i)$ aufgespannt. Daher kann man sagen, $L^N(H_{n-1})$

[5] s. *v. d. Waerden*, Höhere Algebra II, 2. Aufl., Berlin 1940, § 78.

besitzt nach der Bezeichnung von Bertini[6] reguläre Lage bezüglich der Räume $L^N(f_i)$, oder verbandstheoretisch ausgedrückt, es gilt die distributive Formel:

$$L^N(H_{n-1}) \cap \{L^N(f_1) \cup \ldots \cup L^N(f_m)\} = \{L^N(H_{n-1}) \cap L^N(f_1)\} \cup \ldots \cup \{L^N(H_{n-1}) \cap L^N(f_m)\}. \quad (1)$$

Nun folgt aber durch Schlüsse der Verbandstheorie[7] oder durch die von bei Bertini am o. a. Orte abgeleiteten Dimensionsformeln die aus (1) durch Vertauschen der Zeichen $\cup$ und $\cap$ entstehende Beziehung. Dies bedeutet wiederum folgendes: Der Raum $D = L^N(f_1) \cap \ldots \cap L^N(f_m)$ geht bei Projektion aus $L^N(H_{n-1})$, wozu er windschief sein sollte, in einen Raum $\overline{D}$ derselben Dimension über, wobei die $L^N(f_i)$ nach Satz 6 dabei in Räume $L^{N-1}(f_i)$ übergehen mit $\overline{D} = L^{N-1}(f_1) \cap \ldots \cap L^{N-1}(f_m)$. Beim Übergang von $N-1$ zu N hat mithin der Basisraum D, bzw. $\overline{D}$ seine Dimension nicht geändert.

Wir bleiben jetzt weiterhin bei Idealen $(f_1, \ldots, f_m)$ mit isolierten Nullstellen und nennen den Durchschnitt der Räume $L^N(f_i)$ den V^N-Basisraum des Ideals. Grundsätzlich werden nur so große N betrachtet, daß alle diese V^N-Basisräume dieselbe konstante Dimension haben. Es handelt sich nun noch darum einzusehen, daß sie wie in den Beispielen durch ihre „Multiplizitätsbestandteile" aufgespannt werden. Hierfür brauchen wir zunächst folgenden

Satz 13. Der Schnitt des Schmiegraums $T^{(s)}$ eines Punktes P der V_n^N mit dem V^N-Basisraum des Ideals $(f_1, \ldots, f_m)$ hat für alle eine gewisse Zahl N_3 übertreffenden N eine nicht mehr von N abhängende Dimension ($s \leqslant N_3$).

Beweis: D^N sei der V^N-Basisraum des Ideals $(f_1, \ldots, f_m)$. Dann könnte es zunächst sein, daß $D^N \cup T^{(s)}(P)$ die V_n^N in unendlich vielen Punkten, d. h. mindestens in einer Kurve schneidet. Nun wächst aber einerseits die Dimension des Zugehörigkeitsraumes der V^N-Transformierten einer mindestens eindimensionalen Mannigfaltigkeit mit N, wie bereits an der Geraden zu sehen ist, anderseits hat $D^N \cup T^{(s)}$ höchstens die um 1 vermehrte Summe der Dimensionen von D und $T^{(s)}$ als Dimension, die nach Satz 12 also beschränkt bleibt. Von einem gewissen $N \geqslant N_2$ ab schneidet der Raum D^N $T^{(s)}$ mithin nur endlich

---

[6] *Bertini*, Projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume (übersetzt von A. Duschek), Wien 1923, Kap. I, Nr. 21.

[7] s. *J. v. Neumann*, Proc. Nat. Acad. Sci. 22, 101 (1936).

viele Punkte aus V_n^N aus. Für ein solches $N \geqslant N_2$ seien die p Hyperflächen $F_1, \ldots, F_p$ ein Basissystem für das Ideal mit dem V^N-Basisraum $D^N \cup T^{(s)}(P)$. Die F_j erzeugen dann offenbar gerade das Teilideal aller Hyperflächen, die zu $(f_1, \ldots, f_m)$ gehören und zusätzlich einen mindestens $s-1$-fachen Punkt an vorgegebener Stelle besitzen. Auf $(F_1, \ldots, F_p)$ wende man den Satz 12 an. Nach ihm gibt es ein N_3, so daß für alle $N \geqslant N_3$ die Dimension der V^N-Basis $(D^N \cup T^{(s)})$ sich nicht mehr ändert; damit hat für diese N aber auch der Raum $D^N \cap T^{(s)}$ eine von N nicht abhängige Dimension.

Wir wenden jetzt dies Ergebnis der Reihe nach auf die t isolierten Basispunkte $P^{(i)}$ des Ideals $\mathfrak{J} = (f_1, \ldots, f_m)$ an. Dann ergibt sich folgendes: Es gibt eine Zahl N', so daß für alle $N \geqq N'$ der V^N-Basisraum des Ideals mit dem $T^{(\varrho_i)}(P^i)$ im Bildpunkte von P^i genau einen Raum von s_i Dimensionen gemein hat, mit dem $T^{(\varrho_i+1)}$ desselben Punktes denselben Raum, jedoch mit $T^{(\varrho_i-1)}$, wenn $\varrho_i > 0$ ist, einen von geringerer Dimension als s_i. Diese so definierten Schnitträume mögen die Multiplizitätsbestandteile innerhalb D^N heißen. Dann gilt der

Satz 14. Die soeben definierten Multiplizitätsbestandteile im V^N-Basisraum D^N des Ideals $(f_1, \ldots, f_m)$ sind unabhängig voneinander und spannen den Raum D^N genau auf, so daß D^N die Dimension $d = s_1 + \ldots + s_t + t - 1$ hat (N wie immer hinreichend groß angenommen).

Beweis: Die Unabhängigkeit der Multiplizitätskomponenten folgt einfach daraus, daß nach Satz 7 die Schmieg-$T^{(\varrho_i)}$ der V_n^N in den vorgegebenen t verschiedenen Punkten für $N \geqslant \varrho_1 + \ldots + \varrho_t + t - 1$ und somit erst recht alle darin gelegenen Teilräume, wozu die Multiplizitätsbestandteile gehören, unabhängig voneinander sind. Für den zweiten Teil des Satzes behandeln wir zunächst den Fall $n = 2$, nachdem oben unter a) für $n = 1$ bereits alles gezeigt worden ist. Da die Dimension des V^N-Basisraumes D^N für $N \geqslant N'$ nicht von N abhängt und konstant bleibt, muß von einem bestimmten $N \geqslant N_3$ ab der Raum $D^N \cup T^{(N-1)}(S)$, wo S ein beliebiger Punkt der V^N ist, nicht mehr ganz $\langle V_2^N \rangle$ erfüllen, das bedeutet aber nach Satz 4 für diese N gibt es gewiß Kegel K mit der Spitze S im Ideal $\mathfrak{J}$, d. h. Kurven, die in Geraden durch S, je mit bestimmter Vielfachheit, zerfallen. K sei ein derartiger Kegel, dessen Spitze S nicht zu den Grundpunkten des Ideals gehört. $(K, f_1, \ldots, f_m)$ stimmt dann mit $(f_1, \ldots, f_m)$ überein. Nach Abschnitt d) der Sonderfälle wissen wir aber, daß für Ideale, bei denen in der Basis ein solcher Kegel vorkommt, alles richtig ist.

Wir nehmen nunmehr an, bis zu $n-1$ sei alles gezeigt; dann ist der Satz insbesondere für Polynomideale des P_n mit einer Basis der Art $(H_{n-1}, f_2, \ldots, f_m)$ richtig, wo H_{n-1} eine einfach gezählte Hyperebene ist. Dann folgt er aber auch in dem Fall, wo H_{n-1} mit einer beliebigen Vielfachheit a als H_{n-1}^a im Ideal auftritt. Man setze dazu analog wie im Beispiel c) eine Induktion nach a an und bringe wie dort durch ein Projektionsverfahren das Ideal $(H_{n-1}^a, f_2, \ldots, f_m)$ mit $(H_{n-1}^{a-1}, f_2, \ldots f_m)$ in Beziehung. Das Gleiche gilt aber auch, wenn t solche je mit der Vielfachheit a_i behaftete Hyperebenen vorliegen, die der Einfachheit halber alle durch den zum Durchschnitt der $f_2, \ldots, f_m$ fremden Raum H_{n-2} gehen sollen und somit einen Kegel K bilden. Wir verweisen hierzu, ohne es im einzelnen auszuführen, auf die Behandlung des Falles $n=2$ unter d). Nunmehr überzeuge man sich, daß es in dem Ideal $(f_1, \ldots, f_m)$ mit isolierter Basis Kegel K mit allgemein vorgegebener Spitze H_{n-2} gibt, nehme K zur Basis hinzu und hat den Satz damit allgemein bewiesen.

Wir haben somit für jeden isolierten Basispunkt P_o des Ideals $(f_1, \ldots, f_m)$ eine rein geometrisch definierte Vielfachheit gewonnen. Diese Definition gilt auch unabhängig davon, ob die eventuell außer P_o noch vorhandenen Schnittpunkte der f_i isoliert sind oder nicht. Im Falle nicht isolierter weiterer Basis würde natürlich die Dimension des V^N-Basisraumes D^N mit N wachsen, was jedoch an der Definition der Multiplizität im isolierten Punkt nichts ändert. Wir gehen jedoch auf diese Verhältnisse nicht näher ein und verzichten auch darauf, einem nicht isolierten Basisbestandteil des Ideals eine Vielfachheit zuzuteilen, was genau so wie auch sonst durch Zurückführung auf den isolierten Fall zu geschehen hat.

Wir bringen zum Schluß aber noch den Nachweis dafür, daß unsere Vielfachheitsdefinition mit der idealtheoretischen übereinstimmt, wobei wir uns jedoch auf den Fall eines einzigen isolierten Grundpunktes beschränken wollen.

Satz 15. Gegeben seien m Hyperflächen des P_n, die nur den Punkt P als isolierten Schnitt besitzen. Dann stimmt die oben geometrisch definierte Vielfachheit mit der idealtheoretischen überein.

Beweis: $f_1, \ldots, f_m$ seien die gegebenen Hyperflächen. Für alle hinreichend großen N ist dann nach unseren Ausführungen der Durchschnitt D_{s-1} der $L^N(f_i)$ von derselben Dimension $s-1$. D_{s-1} enthält den Punkt $V^N(P)$, der D_o heißen soll und ist in einem gewissen Schmiegraum $T^{(\varrho_i)}(D_o)$ enthalten. Das Ideal $\mathfrak{J} = (f_1, \ldots, f_m)$ ist nun Teiler

des umfassendsten Primideals $\mathfrak{J}'$ aller durch P gehenden Hyperflächen. $\mathfrak{J}'$ hat als V^N-Basisraum nur den Punkt D_0. Nun kann man zwischen D_0 und D_{s-1} ersichtlich eine Kette D_i $(i = 1, \ldots, s = 2)$ einander enthaltender Räume wachsender Dimension zwischenschalten: $D_0 \subset \subset D_1 \subset \ldots \subset D_{s-1}$. Jeder dieser D_i kann als V^N-Basis eines Primärideals genommen werden, das ebenfalls P nur als isolierte Nullstelle besitzt. Diese Kette einander enthaltender Primäridealen kann aus geometrischen Gründen ersichtlich nicht noch verfeinert werden; nach der Idealtheorie[8] definiert man aber die höchste Anzahl der Glieder einer derartigen Kette von Primäridealen zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ als Multiplizität. Damit ist aber die Übereinstimmung dieses Multiplizitätsbegriffes mit unserem geometrischen erwiesen.

[8] s. *W. Gröbner*, a. a. O., Anm. 1, Nr. 127, 16.

Eine projektiv invariante Konfiguration von Linienelementen dritter Ordnung.

Von

Rudolf Inzinger, Wien.

(Eingelangt am 6. Juli 1951.)

In der vorliegenden Note soll auf eine bemerkenswerte projektiv invariante Konfiguration $\mathfrak{K}$ von Linienelementen dritter Ordnung der Ebene hingewiesen werden, die sich ganz zwangsläufig beim Studium der simultanen projektiven Invarianten zweier solcher Linienelemente ergibt. Jedem Elementepaar dritter Ordnung E_{12}, E_{21}, das sich in allgemeiner Lage befindet, wird zunächst eine projektiv äquivalente Figur $\mathfrak{F}$ zugeordnet, die nur aus Punkten und Geraden besteht und deshalb eine unmittelbare geometrische Deutung der vorhandenen projektiven Invarianten J_1, J_2, J_3 und der zwischen ihnen bestehenden Bedingungsgleichung

$$J_1 J_2 J_3 = -1 \tag{1}$$

ermöglicht. Daß ein Elementepaar dritter Ordnung nur zwei wesentliche projektive Invarianten besitzt, hat schon E. Bompiani gezeigt[1]. Zunächst erweist sich die Invariante J_3 als die sogenannte Mehmkesche Invariante[2] der durch die Elemente dritter Ordnung E_{12}, E_{21} bestimmten Linienelemente zweiter Ordnung. Darüber hinaus bestimmt E. Bompiani eine Invariante dritter Ordnung J des Elementepaares E_{12}, E_{21}, die sich irrational durch die beiden hier verwendeten Invarianten J_1 und J_2 ausdrückt. Wir ziehen es jedoch vor, den folgenden Betrachtungen die drei Invarianten J_1, J_2, J_3, die der Bedingungsgleichung (1) genügen, zu Grunde zu legen. Es zeigt sich nämlich, daß die dem Elementepaar E_{12}, E_{21} projektiv äquivalente Figur $\mathfrak{F}$ bei den zyklischen Vertauschungen

---

[1] E. Bompiani, Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei, Rend. Lincei (6) 22 (1935) p. 483–491.

[2] R. Mehmke, Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Kurven und Flächen beziehen. Zschr. Math. u. Phys. 36 (1891), S. 56–60.

ihrer Punkte und Geraden zwei weiteren Elementepaaren dritter Ordnung E_{23}, E_{32} und E_{31}, E_{13} projektiv äquivalent ist. Es ergibt sich somit eine Konfiguration $\mathfrak{K}$ von insgesamt sechs Linienelementen dritter Ordnung, deren Paare E_{ik}, E_{ki} als *assoziiert* bezeichnet werden. Die drei Elementepaare der Konfiguration $\mathfrak{K}$ stimmen somit in ihren simultanen projektiven Invarianten überein, wobei diese jedoch hinsichtlich ihrer geometrischen Bedeutungen die entsprechenden zyklischen Vertauschungen erfahren. *Es zeigt sich also das bemerkenswerte Ergebnis, daß die simultanen projektiven Invarianten dreier assoziierter Elementepaare dritter Ordnung lediglich Invarianten der dadurch bestimmten Elementepaare zweiter Ordnung sind.* Die affinen Invarianten der Elementkonfiguration $\mathfrak{K}$ ergeben sich sodann in ebenso zwangloser Weise als die affinen Invarianten der der Konfiguration $\mathfrak{K}$ zugeordneten Figur $\mathfrak{F}$.

Im folgenden werden lediglich nicht ausgeartete Linienelemente dritter Ordnung betrachtet, das sind solche Elemente, die durch ein Büschel nicht ausgearteter Kegelschnitte bestimmt sind, die sich in einem gemeinsamen Punkt T hyperoskulieren und damit in T eine gemeinsame Tangente t besitzen. Die Polaritäten aller Kegelschnitte dieses Büschels erzeugen sodann die gleiche Projektivität zwischen der Punktreihe der Tangente t und dem Strahlbüschel des Berührpunktes T, in der offensichtlich dem Punkt T von t die Gerade t durch T entspricht, Umgekehrt ist durch eine solche „*Korrelation im Linienelement* (T, t)" ein Büschel hyperoskulierender Kegelschnitte und damit ein Linienelement dritter Ordnung im Linienelement (T, t) bestimmt. Es erweist sich insbesondere bei synthetischen Betrachtungen als zweckmäßig, ein Linienelement dritter Ordnung durch sein Linienelement erster Ordnung (T, t) und durch die darin erzeugte Korrelation zu bestimmen; dagegen wird es für die analytische Behandlung oftmals zweckmäßig sein, aus dem Hyperoskulationsbüschel irgend einen Kegelschnitt als den Repräsentanten des Linienelementes dritter Ordnung auszuwählen.

Im folgenden wird nur der allgemeine Fall der gegenseitigen Lage zweier Linienelemente dritter Ordnung behandelt, der dadurch gekennzeichnet ist, daß keiner der Elementpunkte auf der Geraden des anderen Elementes liegt.

Das Dreieck $T_1\,(1:0:0)$, $T_2\,(0:1:0)$, $T_3\,(0:0:1)$ sei das Hauptdreieck eines projektiven Koordinatensystems $(x_1:x_2:x_3)$, in dem die den Punkten T_i gegenüberliegenden Seiten mit t_i bezeichnet werden. Im folgenden werden Linienelemente dritter Ordnung E_{ik} betrachtet, die im Punkte T_i die Gerade t_k als Tangente besitzen. Ein solches Element wird dann

zweckmäßig durch das Hyperoskulationsbüschel von Kegelschnitten repräsentiert, das von der doppelt zählenden Geraden t_k und jenem Kegelschnitt aufgespannt wird, der neben dem Element E_{ik} noch den Punkt T_k enthält. Demgemäß ist daher

$$a_{ll}\, x_l^2 + 2\, a_{ik}\, x_i\, x_k + 2\, a_{kl}\, x_k\, x_l + a_{kk}\, x_k^2 = 0 \tag{2}$$

die Gleichung des Hyperoskulationsbüschels mit a_{kk} als Büschelparameter. Die Verhältnisse der wesentlichen Koordinaten $(a_{ll}:a_{ik}:a_{kl})$ aus (2) können sodann als die Koordinaten des Elementes dritter Ordnung E_{ik} angesehen werden, wobei jedoch die Bedingungen $a_{ll} \neq 0$ und $a_{ik} \neq 0$ zu beachten sind. Das Verhältnis $(a_{ll}:a_{ik})$ bestimmt offensichtlich das zum Element E_{ik} gehörige Linienelement zweiter Ordnung als Inbegriff der ∞^2 Kegelschnitte, die sich im Linienelement $(T_i,\ t_k)$ oskulieren; es wird zweckmäßig durch jenen Kegelschnitt $(a_{kl} = 0,\ a_{kk} = 0)$ dieser Mannigfaltigkeit repräsentiert, der im Punkte T_k die Gerade t_i berührt.

Die Linienelemente erster Ordnung (T_1, t_2) und (T_2, t_1) zweier Linienelemente dritter Ordnung E_{12}, E_{21} in allgemeiner Lage besitzen sicher keine projektive Invariante; daher genügt es, die Frage zu prüfen, ob und welche Invarianten das Elementepaar $E_{12}\,(a_{33}:a_{12}:a_{23})$ $E_{21}\,(b_{33}:b_{21}:b_{13})$ hinsichtlich der Gruppe

$$\varrho x_1 = \lambda_{11}\, x_1',\quad \varrho\, x_2 = \lambda_{22}\, x_2',\quad \varrho\, x_3 = \lambda_{33}\, x_3' \tag{3}$$

der Kollineationen mit dem Fixpunktedreieck T_1, T_2, T_3 besitzt. Ist $E_{12}'\,(a_{33}' : a_{12}' : a_{23}')$, $E_{21}'\,(b_{33}' : b_{21}' : b_{13}')$ das entsprechende Elementepaar, dann gilt

$$\sigma\, a_{33}' = a_{33}\, \lambda_{33}^2,\quad \sigma\, a_{12}' = a_{12}\, \lambda_{11}\, \lambda_{22},\quad \sigma\, a_{23}' = a_{23}\, \lambda_{22}\, \lambda_{33},$$
$$\tau\, b_{33}' = b_{33}\, \lambda_{33}^2,\quad \tau\, b_{21}' = b_{21}\, \lambda_{11}\, \lambda_{22},\quad \tau\, b_{13}' = b_{13}\, \lambda_{11}\, \lambda_{33},$$

woraus man unmittelbar entnimmt, daß die drei Invarianten

$$J_1 = \frac{a_{33}\, b_{21}}{a_{23}\, b_{13}},\quad J_2 = \frac{a_{23}\, b_{13}}{a_{12}\, b_{33}},\quad J_3 = -\frac{a_{12}\, b_{33}}{a_{33}\, b_{21}} \tag{4}$$

vorhanden sind, zwischen denen die Bedingungsgleichung (1) besteht. Dabei zeigt sich, daß die Invariante J_3 lediglich eine Simultaninvariante der durch die Elemente E_{12}, E_{21} bestimmten Linienelemente zweiter Ordnung ist, die mit der Mehmkeschen Invariante dieser Elemente übereinstimmt. Für $a_{23}\,.\,b_{13} = 0$ liegt ein Sonderfall vor, der dadurch gekennzeichnet ist, daß in mindestens einem der Hyperoskulations-

büschel der Elemente E_{12}, E_{21} ein Kegelschnitt vorhanden ist, der das Linienelement erster Ordnung des anderen Elementes enthält.

Im folgenden soll eine geometrische Deutung der Invarianten J_1, J_2, J_3 angegeben werden, wobei der zuletzt erwähnte Sonderfall $a_{23} \cdot b_{13} = 0$ ausgeschlossen bleiben soll. In den Korrelationen, die durch die Elemente E_{12} und E_{21} in den Linienelementen erster Ordnung (T_1, t_2) und (T_2, t_1) bestimmt werden, entsprechen sodann dem Punkt T_3 die durch T_1, bzw. T_2 gehenden und von t_3 verschiedenen Geraden p_1 und p_2, die sich in einem Punkte Z schneiden; seine Verbindungsgerade mit T_3 wird mit p_3 bezeichnet. Ebenso entsprechen in diesen Korrelationen der Geraden t_3 die Punkte P_2 und P_1, die auf t_2, bzw. t_1 liegen und von T_3 verschieden sind. Sie besitzen daher eine Verbindungsgerade z, die t_3 in einem Punkte P_3 schneidet. Durch diese beiden projektiv invarianten Konstruktionen hat sich nun eine Figur $\mathfrak{F}$ ergeben, die aus den Punkten T_1, T_2, T_3, P_1, P_2, P_3, Z und den Geraden t_1, t_2, t_3, p_1, p_2, p_3, z, im wesentlichen also aus dem Hauptdreieck T_1, T_2, T_3, dem Punkt Z und der Geraden z besteht. Man erkennt nun leicht, daß die Figur $\mathfrak{F}$ dem Elementepaar E_{12}, E_{21} projektiv äquivalent ist, d. h. daß auch umgekehrt durch die Figur $\mathfrak{F}$ das Elementepaar E_{12}, E_{21} bestimmt ist. Dies wird unmittelbar klar, wenn man beachtet, daß die Punkte T_1, P_2, T_3 im Verein mit den entsprechenden Geraden t_2, t_3, p_1 die Korrelation des Elementes E_{12} und die Punkte T_2, P_1, T_3 im Verein mit den entsprechenden Geraden t_1, t_3, p_2 die Korrelation des Elementes E_{21} bestimmen.

Wegen der zwischen der Figur $\mathfrak{F}$ und dem Elementepaar E_{12}, E_{21} bestehenden projektiven Äquivalenz müssen alle projektiven Invarianten des Elementepaares auch solche der Figur $\mathfrak{F}$ sein und umgekehrt. Die projektiven Invarianten der Figur $\mathfrak{F}$ sind nun überaus einfach bestimmbar. Sind nämlich Q_1, Q_2, Q_3 die Schnittpunkte der Geraden p_1, p_2, p_3 mit den Geraden t_1, t_2, t_3, dann sind die Doppelverhältnisse

$$J_1 = (P_1 Q_1 T_2 T_3), \quad J_2 = (P_2 Q_2 T_3 T_1), \quad J_3 = (P_3 Q_3 T_1 T_2)$$

die einzigen projektiven Invarianten von $\mathfrak{F}$, die offensichtlich der Beziehung (1) genügen.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß die so erhaltenen projektiven Invarianten mit den zuvor auf analytischen Wege gewonnenen übereinstimmen. Man beachte hierzu, daß sich für den Punkt Z

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_{23} b_{33} : a_{33} b_{13} : -a_{23} b_{13} \tag{5}$$

und für die Gerade z

$$u_1 : u_2 : u_3 = a_{32}\, b_{13} : a_{23}\, b_{21} : a_{23}\, b_{13} \tag{6}$$

ergibt. Es ist daher

$$J_1 = -\frac{u_2\, x_2}{u_3\, x_3}, \quad J_2 = -\frac{u_3\, x_3}{u_1\, x_1}, \quad J_3 = -\frac{u_1\, x_1}{u_2\, x_2}$$

woraus wegen (5) und (6) die Übereinstimmung mit (4) folgt. Man sieht nun, daß in den Sonderfällen $a_{23} = 0$, bzw. $b_{13} = 0$ der Punkt Z mit T_2, bzw. T_1 und die Gerade z mit t_1, bzw. t_2 zusammenfällt. In diesen Fällen sind somit Invarianten dritter Ordnung überhaupt nicht vorhanden. Gilt jedoch $a_{23} = 0$ und $b_{13} = 0$, dann wird sowohl der Punkt Z als auch die Gerade z unbestimmt, da sowohl die drei Punkte P_1, P_2, T_3 als auch die drei Geraden p_1, p_2, t_3 zusammenfallen. Im folgenden soll daher weiterhin immer der allgemeine Fall $a_{23}.b_{13} \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Die Invariante J_3 gestattet eine geometrische Deutung als das charakteristische Doppelverhältnis jener eindeutig bestimmten perspektiven Kollineation, die das Element E_{12} in das Element E_{21} überführt. Sie besitzt den Punkt P_3 als Kollineationszentrum, die Gerade p_3 als Kollineationsachse und T_1, T_2 als ein Paar entsprechender Punkte. Die Punkte T_3 und Z bleiben als Punkte der Kollineationsachse fest, während der Punkt P_2 in den Punkt P_1 übergeführt wird. Damit wird aber die Korrelation des Elementes E_{12} in die des Elementes E_{21} transformiert. Es gibt somit im allgemeinen Fall ($a_{23}.b_{13} \neq 0$) eine und nur eine perspektive Kollineation, die das Element E_{12} in das Element E_{21} transformiert. Jede perspektive Kollineation mit dem charakteristischen Doppelverhältnis J_3, die T_1 in T_2 transformiert, deren Achse durch T_3 geht und deren Zentrum auf t_3 liegt, transformiert offensichtlich das Element zweiter Ordnung von E_{12} in das Element zweiter Ordnung von E_{21} und zwar auch dann, wenn der Sonderfall $a_{23}.b_{13} = 0$ vorliegt. In der einparametrigen Schar dieser Kollineationen gibt es jedoch dann und nur dann auch eine Kollineation, die die Elemente dritter Ordnung in einander überführt, wenn $a_{23}.b_{13} \neq 0$ gilt.

In der zu dem Elementepaar E_{12}, E_{21} gehörigen projektiv äquivalenten Figur $\mathfrak{F}$ treten die Punkte T_1, T_2, T_3 insofern nicht gleichberechtigt auf, als T_3 der Schnittpunkt der beiden Elementengeraden t_1 und t_2 ist, während die auf der Geraden t_3 liegenden Punkte T_1 und T_2 die Punkte der Elemente E_{12}, E_{21} darstellen. Durch die beiden möglichen zyklischen Vertauschungen der geometrischen Bedeutungen dieser Punkte ergeben sich sodann zwei weitere Elementepaare E_{23}, E_{32} und

E_{31}, E_{13}, die gleichfalls zur Figur $\mathfrak{F}$ projektiv äquivalent sind. *Zu jeder Figur $\mathfrak{F}$ gehört somit eine aus insgesamt sechs Linienelementen dritter Ordnung bestehende Konfiguration $\mathfrak{K}$, deren Elementepaare E_{12}, E_{21}; E_{23}, E_{32}; E_{31}, E_{13} als assoziiert bezeichnet werden.* Sämtliche Elementepaare der Konfiguration $\mathfrak{K}$ stimmen in ihren simultanen projektiven Invarianten überein, doch erfahren diese hinsichtlich ihrer geometrischen Bedeutung die gleichen zyklischen Vertauschungen. Es ist daher insbesondere jede der Invarianten J_l eine Invariante zweiter Ordnung des Elementepaares E_{ik}, E_{ki}, nämlich das charakteristische Doppelverhältnis jener perspektiven Kollineation mit P_l als Zentrum und p_l als Kollineationsachse, die das Element E_{ik} in das Element E_{ki} transformiert. *Es ergibt sich somit das bemerkenswerte Ergebnis, daß die simultanen projektiven Invarianten der aus den sechs Elementen dritter Ordnung bestehenden Konfiguration $\mathfrak{K}$ lediglich Invarianten zweiter Ordnung der darin enthaltenen Elementepaare E_{12}, E_{21}; E_{23}, E_{32}; E_{31}, E_{13} sind.*

Wird auf jedes der Elementepaare E_{ik}, E_{ki} der Satz von Peaucellier[3] angewendet, dann gilt für die Krümmungsradien r_{ik}, r_{ki} dieser Elemente und die zugehörigen Dreiecksseiten s_k, s_i die Beziehung

$$J_l = \frac{r_{ik}\, s_i^3}{r_{ki}\, s_k^3}, \tag{7}$$

so daß wegen (1) für die Krümmungsradien aller in der Konfiguration $\mathfrak{K}$ auftretenden Linienelemente schließlich

$$\frac{r_{12}\, r_{23}\, r_{31}}{r_{21}\, r_{32}\, r_{13}} = -1 \tag{8}$$

gilt. Dadurch findet die zwischen den Invarianten J_1, J_2, J_3 bestehende Beziehung (1) ihre metrische Interpretation.

Durch das Dreieck T_1, T_2, T_3 und durch die der Bedingungsgleichung (8) genügenden Verhältnisse $r_{ik} : r_{ki}$ der Krümmungsradien der Elementepaare E_{ik}, E_{ki} sind zwar die Invarianten (7) bestimmt, doch gibt es eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit von Konfigurationen, deren Invarianten übereinstimmen. Irgend zwei Konfigurationen dieser Mannigfaltigkeit entsprechen sich sodann in einer Kollineation mit dem Fixpunktedreieck T_1, T_2, T_3. Zwischen den Punkten Z und den Geraden z der projektiv äquivalenten Figuren besteht dann die quadratische Korrelation

---

[3] Vgl. Rohn-Papperitz, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, 1. Bd., p. 237, 3. Aufl.

$$x_i : x_k : x_l = u_k u_l : u_l u_i J_i J_k : -u_i u_k J_k.$$

Bemerkenswert ist jener projektiv invariante Sonderfall, bei dem die Geraden z mit ihren korrelativ entsprechenden Punkten Z inzident sind. Es bestehen dann für die Invarianten neben (1) noch die von einander abhängigen Bedingungsgleichungen

$$1 + J_i J_k - J_k = 0,$$

so daß also durch eine der Invarianten alle weiteren bestimmt sind. Es zeigt sich weiters, daß in diesem Falle die Invarianten als die Werte der Doppelverhältnisse des auf der Geraden z liegenden Punktequadrupels Z, P_1, P_2, P_3 in den Anordnungen

$$J_1 = (Z\, P_1\, P_2\, P_3), \quad J_2 = (Z\, P_2\, P_3\, P_1), \quad J_3 = (Z\, P_3\, P_1\, P_2)$$

gedeutet werden können.

Die zu einer Elementkonfiguration $\mathfrak{K}$ projektiv äquivalente Figur $\mathfrak{F}$ bestimmt eindeutig einen Kegelschnitt, der das Hauptdreieck T_1, T_2, T_3 als Poldreieck und den Punkt Z als Pol der Geraden z besitzt. Die Figur $\mathfrak{F}$ und damit auch die Elementkonfiguration $\mathfrak{K}$ sind sodann autopolar bezüglich dieses Kegelschnittes. *Es gibt daher eine und nur eine Polarität, die eine Elementkonfiguration $\mathfrak{K}$ invariant läßt und dabei die Elemente ihrer Paare untereinander vertauscht.*

Sind im Dreieck T_1, T_2, T_3 zwei Elementkonfigurationen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gegeben, dann bestimmen die projektiv äquivalenten Figuren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ die sechs Doppelverhältnisse

$$\delta_1 = (P_1 P_1'\, T_2\, T_3) = \frac{u_2 u_3'}{u_3 u_2'}, \quad \delta_2 = (P_2 P_2'\, T_3\, T_1) = \frac{u_3 u_1'}{u_1 u_3'},$$

$$\delta_3 = (P_3 P_3'\, T_1\, T_2) = \frac{u_1 u_2'}{u_2 u_1'} \tag{9}$$

$$\varepsilon_1 = (Q_1 Q_1'\, T_2\, T_3) = \frac{x_3 x_2'}{x_2 x_3'}, \quad \varepsilon_2 = (Q_2 Q_2'\, T_3\, T_1) = \frac{x_1 x_3'}{x_3 x_1'},$$

$$\varepsilon_3 = (Q_3 Q_3'\, T_1\, T_2) = \frac{x_2 x_1'}{x_1 x_2'} \tag{10}$$

die den Bedingungsgleichungen

$$\delta_1 \delta_2 \delta_3 = 1, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$$

genügen und zu den Invarianten der Konfigurationen in der Beziehung

$$\frac{J_1}{J_1'} = \frac{\delta_1}{\varepsilon_1}, \quad \frac{J_2}{J_2'} = \frac{\delta_2}{\varepsilon_2}, \quad \frac{J_3}{J_3'} = \frac{\delta_3}{\varepsilon_3}$$

stehen. Die sechs Doppelverhältnisse (9) und (10) sind sodann die projektiven Simultaninvarianten der Elementkonfigurationen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Die Konfigurationen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ entsprechen sich dann und nur dann in einer Kollineation, die T_1, T_2, T_3 fest läßt, wenn sie in ihren Invarianten übereinstimmen. Es gilt dann

$$\delta_1 = \varepsilon_1 = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{22}}, \quad \delta_2 = \varepsilon_2 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}, \quad \delta_3 = \varepsilon_3 = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}}$$

wobei $\lambda_{11} : \lambda_{22} : \lambda_{33}$ die Substitutionskoeffizienten der Kollineation (3) sind die $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}'$ transformiert.

Die affinen Invarianten einer Elementkonfiguration $\mathfrak{K}$ sind natürlich die affinen Invarianten ihrer projektiv äquivalenten Figur $\mathfrak{F}$. Es sind hierbei die verschiedenen Lagemöglichkeiten der Figur $\mathfrak{F}$ zur Ferngeraden der affinen Ebene zu unterscheiden. In allen Fällen wird jedoch daran festgehalten, daß die Gerade z der Figur $\mathfrak{F}$ durch keine der Dreiecksecken T_i geht und der Punkt Z auf keiner der Dreiecksseiten t_i liegt.

Ist das Dreieck T_1, T_2, T_3 der Konfiguration $\mathfrak{K}$ ein eigentliches Dreieck der affinen Ebene und ist z eine eigentliche Gerade, dann gibt es eine und nur eine Kollineation die das Dreieck T_1, T_2, T_3 fest läßt und die Gerade z in die Ferngerade transformiert. Dadurch entsteht sodann aus der Konfiguration $\mathfrak{K}$ die Konfiguration $\mathfrak{K}'$, die dadurch gekennzeichnet ist, daß alle ihre Elementepaare E'_{ik}, E'_{ki} die Verbindungsgerade t_l ihrer Elementpunkte als gemeinsame Affinnormalen besitzen. *Es kann also jede Elementkonfiguration K eines eigentlichen Dreieckes auf eine und nur eine Weise so kollinear transformiert werden, daß die festbleibenden Seiten des Dreieckes gemeinsame Affinnormalen der Elementepaare der transformierten Konfiguration $\mathfrak{K}'$ werden.* Die projektiven Simultaninvarianten (9) und (10) der Konfigurationen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ sind nunmehr die Affininvarianten der Konfiguration $\mathfrak{K}$. Es sind dies die Teilverhältnisse

$$\delta_1 = (T_2\, T_3\, P_1), \quad \delta_2 = (T_3\, T_1\, P_2), \quad \delta_3 = (T_1\, T_2\, P_3) \qquad (11)$$

sowie die Doppelverhältnisse (10). Die Teilverhältnisse

$$\vartheta_1 = (T_2\, T_3\, Q_1), \quad \vartheta_2 = (T_3\, T_1\, Q_2), \quad \vartheta_3 = (T_1\, T_2\, Q_3)$$

mit der Bedingungsgleichung

$$\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 = -1$$

sind dann gleichfalls Affininvarianten der Konfiguration $\mathfrak{K}$, da sie im Verein mit (11) zu den projektiven Invarianten von $\mathfrak{K}$ in der Beziehung

$$J_1 = \frac{\delta_1}{\vartheta_1}, \quad J_2 = \frac{\delta_2}{\vartheta_2}, \quad J_3 = \frac{\delta_3}{\vartheta_3}$$

stehen. Insgesamt ergeben sich somit die sechs Affininvarianten δ_1, δ_2, δ_3; ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 einer Elementkonfiguration $\mathfrak{K}$ in allgemeiner Lage, von denen allerdings bloß vier wesentlich sind.

Damit ist nicht nur der Hauptfall, sondern zugleich auch der durch $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$ gekennzeichnete Sonderfall erledigt, bei dem die Gerade z der Figur $\mathfrak{F}$ mit der Ferngeraden der affinen Ebene übereinstimmt. Die drei Affininvarianten $J_l = {}^1/\vartheta_l$ erweisen sich sodann als die charakteristischen Teilverhältnisse jener perspektiven Affinitäten, die die Elemente E_{ik} in die Elemente E_{ki} transformieren. Es gilt daher für die Affinkrümmungen entsprechender Elemente

$$\vartheta_l = \left(\frac{\varkappa_{ik}}{\varkappa_{ki}}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

und somit für die Affinkrümmungen aller an der Konfiguration beteiligten Elemente

$$\frac{\varkappa_{12}\,\varkappa_{23}\,\varkappa_{31}}{\varkappa_{21}\,\varkappa_{32}\,\varkappa_{13}} = 1.$$

Als Gegenstück hierzu ist noch jener Fall zu erwähnen, bei dem der Punkt Z der Figur $\mathfrak{F}$ auf die Ferngerade der affinen Ebene zu liegen kommt. Es gilt dann

$$1 + \vartheta_i \vartheta_k - \vartheta_i = 0.$$

Damit sind nun alle affininvarianten Formen der Elementkonfigurationen eines eigentlichen Dreieckes der affinen Ebene besprochen.

Ein weiterer affininvarianter Fall liegt vor, wenn eine der Dreiecksecken der Konfiguration $\mathfrak{K}$, etwa T_3, in der Ferngeraden liegt; die Gerade z der Figur $\mathfrak{F}$ muß dann eine eigentliche Gerade sein. Es gilt dann

$$\delta_1 = 0,\ \delta_2 = \infty,\ \delta_3 = (T_1\,T_2\,P_3); \quad \vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \infty,\ \vartheta_3 = (T_1\,T_2\,Q_3) \tag{12}$$

und

$$J_1 = \frac{\delta_1}{\vartheta_1} = (P_1\,Q_1\,T_2),\ J_2 = \frac{\delta_2}{\vartheta_2} = (Q_2\,P_2\,T_1),\ J_3 = \frac{\delta_3}{\vartheta_3} = (P_3 Q_3 T_1 T_2). \tag{13}$$

Der Punkt Z ist dann der Schnittpunkt der Affinnormalen der Elemente des Paares E_{12}, E_{21}. Von den beiden weiteren Elementepaaren der Konfiguration sind die Elemente E_{31} und E_{32} uneigentlich, doch besitzen sie die parallelen Tangenten t_1 und t_2 als eigentliche Tangenten; sie werden daher als uneigentliche Elemente erster Art bezeichnet. Es ergibt sich also, daß ein uneigentliches Element erster Art mit einem eigentlichen Element in allgemeinerer Lage die Affininvarianten δ_3, ϑ_3 (12) und J_1, J_2 (13) besitzt von denen allerdings bloß drei wesentlich sind. Ist auch der Punkt Z der Figur $\mathfrak{F}$ uneigentlich, dann besitzen die Elemente E_{12} und E_{21} parallele Affinnormalen und entsprechen sich in der zentrischen Ähnlichkeit mit P_3 als Zentrum und J_3 als Streckungsverhältnis.

Ein weiterer affininvarianter Fall liegt vor, wenn eine der Dreiecksseiten der Konfiguration $\mathfrak{K}$, etwa t_3, mit der Ferngeraden der affinen Ebene übereinstimmt; die Gerade z der Figur $\mathfrak{F}$ muß dann eine eigentliche Gerade sein. Die Konfiguration $\mathfrak{K}$ besteht dann aus den beiden eigentlichen Elementen E_{31}, E_{32}, den beiden uneigentlichen Elementen erster Art E_{12}, E_{21} mit den eigentlichen Tangenten t_2 und t_1, sowie aus den beiden Elementen E_{13}, E_{23} mit der Ferngeraden als gemeinsamer Tangente, die deshalb als uneigentliche Elemente zweiter Art bezeichnet werden. Es gilt dann

$$\delta_1 = \infty, \quad \delta_2 = 0; \quad \vartheta_1 = \infty, \ \vartheta_2 = 0$$

während δ_3 und ϑ_3 nicht definiert ist. Dagegen ergibt sich

$$J_1 = \frac{\delta_1}{\vartheta_1} = (Q_1\, P_1\, T_3),\ J_2 = \frac{\delta_2}{\vartheta_2} = (P_2 Q_2\, T_3),\ J_3 = \frac{\delta_3}{\vartheta_3} = (P_3 Q_3\ T_1\, T_2),$$

so daß also in dem vorliegenden Falle drei Affininvarianten vorhanden sind von denen jedoch bloß zwei wesentlich sind.

Damit sind nun alle affininvarianten Lagemöglichkeiten einer Konfiguration $\mathfrak{K}$ diskutiert. Dabei wurde immer der Fall ausgeschlossen, daß von den beiden Elementen dritter Ordnung E_{12} und E_{21} eines mit dem Element zweiter Ordnung des anderen einem Kegelschnitt angehört, da sonst nur die Mehmkesche Invariante des Paares als einzige projektive Invariante vorhanden ist. Tatsächlich läßt sich das Elementepaar in diesem Falle nicht zu einer Elementkonfiguration $\mathfrak{K}$ ergänzen. Es sind jedoch im allgemeinen auch hier weitere Affininvarianten des Elementepaares dritter Ordnung E_{12}, E_{21} vorhanden, doch scheint die Besprechung der dabei auftretenden Fälle kaum von Interesse zu sein.

Sind zwei Linienelemente dritter Ordnung E_{12} und E_{21} in allgemeiner Lage gegeben, dann kann man sich im Anschluß an die bisherigen Betrachtungen die Frage vorlegen, welche Aussagen der projektiven Differentialgeometrie sich aus der Figur $\mathfrak{F}$ ableiten lassen, wenn das Element E_{21} in einer die Elemente E_{21} und E_{12} verbindenden Kurve k gegen das Element E_{12} konvergiert. Zunächst ist es naheliegend, daß aus der Mehmkeschen Invariante J_3 das projektive Bogendifferential von k abgeleitet werden kann, was A. Terracini[4] auch tatsächlich ausgeführt hat. Bei dem angedeuteten Grenzübergang degeneriert natürlich das Dreieck T_1, T_2, T_3, doch zeigt sich, daß dabei die Gerade z gegen die Projektivnormale von k und der Punkt Z gegen den projektiven Pol von k konvergiert. Überdies muß sich aus den drei Invarianten J_1, J_2, J_3 neben dem projektiven Bogendifferential auch noch eine Grenzwertformel für die Projektivkrümmung der Kurve k gewinnen lassen. Die hier bloß angedeuteten Gedanken hat kürzlich mein Schüler W. Ströher ausgeführt, worüber er selbst berichten wird.

[4] A. Terracini, La lunghezza proiettiva di un arco di curva piana, Peridico di Matematiche, ser. IV, vol. XIII (1933), P. 99—119.

Über die untere Grenze der positiven Werte reeller quadratischer Formen*.

Von

Walter Gastinger, Wien.

(Eingelangt am 9. Juli 1951.)

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit folgendem Problem: Es soll für jede natürliche Zahl n eine möglichst kleine reelle Zahl p_n gefunden werden, deren Wert nur von n abhängt und die die Eigenschaft besitzt, daß die Ungleichung

$$0 < P(x_1, \ldots, x_n) \leqq p_n \mid D \mid^{\frac{1}{n}}$$

in ganzrationalen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ lösbar ist, wobei P eine indefinite oder positiv definite (bzw. nur eine indefinite) reelle quadratische Form mit der Determinante $D \neq 0$ ist.

Anders ausgedrückt lautet das Problem:

Es ist eine möglichst kleine obere Schranke für das Infimum der positiven Werte, die durch eine Form P mit den obigen Eigenschaften dargestellt werden, zu finden. Das beste mir bekannte Ergebnis für alle n ist der folgende

Satz I (Blaney [2]):

Es sei $P(x_1, \ldots, x_n)$ eine indefinite oder positiv-definite reelle quadratische Form mit der Determinante $D \neq 0$. Es gibt für jede derartige Form ganzrationale Zahlen $g_1, \ldots, g_n$, $(g_1, \ldots, g_n) = 1$, die folgender Ungleichung genügen:

$$0 < P(g_1, \ldots, g_n) \leqq 2^{n-1} \mid D \mid^{\frac{1}{n}}$$

Bessere allgemeine Ergebnisse sind für positiv-definite reelle quadratische Formen bekannt (siehe z. B. später die Hilfssätze 1 und 2), für indefinite Formen nur für einzelne Werte von n.

---

* Auszug aus der 1951 an der Wiener Universität approbierten Dissertation.

Für $n = 2$ gilt

Satz II (in etwas anderer Form bei: Davenport-Heilbronn [5]):

Ist $Q(x, y)$ eine indefinite binäre quadratische Form, dann besitzt die Ungleichung

$$0 < Q(x, y) \leqq 2 \mid D \mid^{\frac{1}{2}}$$

stets eine Lösung in ganzrationalen x, y. Das Gleichheitszeichen wird erreicht durch die zu $Q = x\,y$ gehörige Formenklasse.

Für Formen in 3 Variablen gelten folgende Sätze:

Satz IIIa (Davenport [4]):

$Q(x, y, z)$ sei eine indefinite ternäre quadratische Form mit reellen Koeffizienten, $D > 0$. Es gibt ganzrationale Zahlen x, y, z so daß

$$0 < Q(x, y, z) \leqq (\tfrac{27}{4} D)^{\frac{1}{3}}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hiebei nur, falls Q äquivalent ist einem positiven Vielfachen der Form

$$x^2 - {}^1/_3\, y^2 - {}^1/_3\, z^2 + {}^2/_3\, x\,y - {}^2/_3\, x\,z - {}^2/_3\, y\,z$$

Satz IIIb (ib.):

$Q(x, y, z)$ wie unter IIIa, jedoch $D < 0$. Es gibt ganzrationale Zahlen x, y, z, so daß

$$0 < Q(x, y, z) \leqq (4 \mid D \mid)^{\frac{1}{3}}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hiebei nur, wenn Q äquivalent einem positiven Vielfachen der Form $x^2 + y\,z$ ist.

Das Ziel dieser Untersuchung ist die Herleitung eines allgemeinen Ergebnisses, das eine Verbesserung von Satz I darstellt. Die beiden zu beweisenden Sätze sind:

Satz IV:

Ist $P(x_1, \ldots, x_n)$ eine indefinite oder positiv-definite quadratische Form mit reellen Koeffizienten und der Determinante $D \neq 0$, so ist die Ungleichung

$$0 < P(x_1, \ldots, x_n) \leqq p_n \mid D \mid^{\frac{1}{n}}$$

in ganzen Zahlen lösbar, wobei

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}},$$

$$p_4 = 2\sqrt[4]{8},\quad p_5 = 4,\quad p_6 = 4\sqrt[6]{2},$$

$$p_7 = 4\sqrt[7]{\frac{16}{3}},\quad p_8 = 4\sqrt{2},\quad p_9 = 4\sqrt[8]{4},$$

$$p_n = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot \left\{\Gamma\left(1 + \frac{n+1}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{n}} \quad \text{für } 10 \leqq n \leqq 17,$$

$$p_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{für } n \geqq 18.$$

Satz V:

Es gibt reelle indefinite quadratische Formen $Q(x_1, \ldots, x_n)$, deren sämtliche positive Werte $\geqq G_n \mid D \mid^{\frac{1}{n}}$ sind. Für ungeradzahliges n kann $G_n = 2^{\frac{n-1}{n}}$, für geradzahliges n $G_n' = 2$ gesetzt werden.

Im folgenden § 2 wird der ganz kurze Beweis von Satz V gegeben. § 3 enthält Hilfssätze zur Herleitung von Satz IV, der in den §§ 4, 5 bewiesen wird.

Ich danke Herrn Prof. Dr. *N. Hofreiter* für die Anregung dieser Untersuchungen sowie für wertvolle Ratschläge zur prägnanten Formulierung der Beweise.

§ 2. Beweis von Satz V.

a) $n = 2m$:

Wir betrachten die Form $Q_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} x_k\, x_{n+1-k}$.

Sie ist indefinit und hat die Determinante $\mid D \mid = 2^{-n}$.

Das Minimum der positiven Werte von Q_1 ist $M = 1$. Es gilt also $M = 2 \mid D \mid^{\frac{1}{n}}$, d. h. unsere Behauptung: $G_n' = 2$.

b) $n = 2m + 1$:

Wir betrachten die Form $Q_2(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n+1)} x_k\, x_{n+1-k}$

Sie ist indefinit und hat die Determinante $\mid D \mid = 2^{-(n-1)}$ und $M = 1$. Es ist also $M = 2^{\frac{n-1}{n}} \mid D \mid^{\frac{1}{n}}$, d. h. $G_n = 2^{\frac{n-1}{n}}$, wie behauptet wurde.

§ 3. Hilfssätze.

Um Satz IV zu beweisen, benutzen wir folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 1.

Ist $Q(x_1, \ldots, x_n)$ eine reelle definite quadratische Form mit der Determinante D, so hat die Ungleichung

$$0 < |Q(x_1, \ldots, x_n)| \leqq (4/3)^{\frac{n-1}{2}} \cdot |D|^{\frac{1}{n}}$$

ein n-tupel ganzrationaler $x_1, \ldots, x_n$ als Lösung.

Dieser Satz wurde zuerst von Hermite bewiesen (siehe Bachmann [1], auf S. 255).

Hilfssatz 2 (Blichfeldt [3]).

Ist $Q(x_1, \ldots, x_n)$ eine positiv definite quadratische Form mit der Determinante D, so hat die Ungleichung

$$0 < Q(x_1, \ldots, x_n) < \frac{2}{\pi}\left\{\Gamma\left(1 + \frac{n+2}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{n}} \cdot |D|^{\frac{1}{n}}$$

stets eine Lösung in ganzrationalen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$.

Es sei $P(x_1, \ldots, x_n)$ eine indefinite oder positiv definite reelle quadratische Form. M bedeutet die untere Grenze der Menge der positiven Werte von P. Diese ist, falls P positiv definit ist, gleichzeitig Minimum. $M = 0$ kann nur für indefinite P vorkommen und kann aus unseren weiteren Überlegungen ausgeschlossen werden, da dann Satz IV sogar für ein beliebig kleines positives p_n gilt. Wir setzen also voraus: $M > 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein ε_0, $0 \leqq \varepsilon_0 < \varepsilon$, derart, daß der Wert $\frac{M}{1-\varepsilon_0}$ durch P dargestellt wird. Die (ganzrationalen) $x_1, \ldots, x_n$, für die dies eintritt, sind teilerfremd. Daher kann man durch eine unimodulare Transformation erreichen, daß

$$\frac{M}{1-\varepsilon_0} = P'(1, 0, \ldots, 0), \quad \text{wo} \quad P' \sim P.$$

Der Strich wird im folgenden der Einfachheit halber wieder weggelassen. Hieraus ergibt sich folgende Darstellung

$$\frac{1-\varepsilon_0}{M} P(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^2 + R(x_2, \ldots, x_n), \quad (1)$$

wobei $R(x_2, \ldots, x_n)$ eine reelle quadratische Form in den $n-1$ Variablen $x_2, \ldots, x_n$ ist. Die Determinanten von R und P stehen in der Beziehung

$$D(R) = \left(\frac{1-\varepsilon_0}{M}\right)^n \cdot D(P)$$

Für die durch (1) definierte Form $R(x_2, \ldots, x_n)$ gilt nun der

Hilfssatz 3.

Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ist $R(x_2, \ldots, x_n) \leqq -1/4$, falls $R(x_2, \ldots, x_n) < 0$ ist.

Dem Beweise vorausgeschickt sei die folgende

Bemerkung:

Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine ganzrationale Zahl g, für die $1/4 \leqq (g+a)^2 \leqq 1$ gilt.

Denn zu jedem reellen a gibt es ein ganzrationales g, so daß $1/2 \leqq |g+a| \leqq 1$, woraus sich durch Quadrieren die behauptete Beziehung ergibt.

Beweis von Hilfssatz 3 (indirekter Beweis).

Annahme: Es gibt ganzrationale $g_2, \ldots, g_n$, für die

$$-1/4 < R(g_2, \ldots, g_n) < 0$$

gilt. Ich setze

$$a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n = a$$

und wähle, gemäß obiger Bemerkung, g_1 so, daß

$$1/4 \leqq (g_1 + a)^2 \leqq 1 \qquad (2)$$

wird. Dann ist

$$(g_1+a)^2 + R(g_2, \ldots, g_n) = \frac{1-\varepsilon_0}{M} \cdot P(g_1, \ldots, g_n) > 1/4 - 1/4 = 0$$

Für ausreichend kleines ε folgt daraus:

$$P(g_1, \ldots, g_n) > 0, \quad \text{ja sogar} \quad P(g_1, \ldots, g_n) \geqq M.$$

Somit ist

$$(g_1+a)^2 + R(g_2, \ldots, g_n) \geqq 1 - \varepsilon_0 \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt

$$1 + R(g_2, \ldots, g_n) \geqq 1 - \varepsilon_0$$

oder

$$R(g_2, \ldots, g_n) \geqq -\varepsilon_0 \qquad (4)$$

Wir haben somit folgende Implikation abgeleitet:

$$0 > R(x_2, \ldots, x_n) > -1/4 \rightarrow R(x_2, \ldots, x_n) \geqq -\varepsilon_0$$

Dann gilt auch die Umkehrung

$$R(x_2, \ldots, x_n) < -\varepsilon_0 \rightarrow R(x_2, \ldots, x_n) \leqq -1/4. \qquad (5)$$

Aus (4) folgt $\dfrac{-\varepsilon_0}{R(g_2, \ldots, g_n)} \geqq 1.$

Es gibt daher sicher eine natürliche Zahl ν, so daß gilt

$$4^{\nu-1} \leqq \frac{\varepsilon_0}{-R(g_2, \ldots, g_n)} < 4^{\nu}. \tag{6}$$

Aus dem ersten Teil dieser Ungleichung folgt

$$-4\varepsilon_0 \leqq R(g_2', \ldots, g_n'), \quad \text{wobei} \quad g_i' = 2^{\nu} g_i \quad (i = 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Aus dem zweiten Teil von (6) ergibt sich

$$R(g_2', \ldots, g_n') < -\varepsilon_0. \tag{8}$$

Hieraus folgern wir mit Hilfe von (5):

$$R(g_2', \ldots, g_n') \leqq -1/4. \tag{9}$$

(7) und (9) zusammengefaßt ergeben aber

$$-4\varepsilon_0 \leqq -1/4, \quad \text{oder} \quad \varepsilon_0 \geqq 1/16 \tag{10}$$

Wähle ich also $\varepsilon \leqq 1/16$, wodurch $\varepsilon_0 < 1/16$ wird, und durchlaufe die ganze Schlußkette von der Annahme bis zu (10), so erhalte ich einen Widerspruch, womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

§ 4.

Es erweist sich als zweckmäßig, vor der Herleitung eines Satzes mit einer numerisch-konkreten Schranke die verwendete Methode in allgemeiner Form durchzuführen. Dazu schälen wir das den Hilfssätzen 1 und 2 gemeinsame Gerüst heraus. Es lautet: Ist $Q(x_1, \ldots, x_n)$ eine definite quadratische Form mit der Determinante D, so besitzt die Ungleichung

$$0 < |Q(x_1, \ldots, x_n)| \leqq a_n |D|^{\frac{1}{n}} \tag{11}$$

stets eine Lösung in ganzrationalen $x_1, \ldots, x_n$.

Als zu beweisende Aussage nehmen wir aus Satz IV nur den ersten Teil heraus:

Es gibt eine nur von n abhängige Konstante p_n, für die die Ungleichung

$$0 < P(x_1, \ldots, x_n) \leqq p_n \cdot |D|^{\frac{1}{n}}$$

eine Lösung in ganzrationalen $x_1, \ldots, x_n$ besitzt.

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.

a) Für $n = 1$ gilt der Satz: Es ist $p_1 = 1$.

b) Induktionsannahme: Der Satz gilt für Formen mit $n-1$ Variablen.

O. B. d. A. sei die Determinante von $P(x_1, \ldots, x_n) : D = \pm 1$.

Zugrundegelegt wird wieder der Ausdruck (1):

$$\frac{1-\varepsilon_0}{M} P(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^2 + R(x_2, \ldots, x_n).$$

Die Form R kann nicht semidefinit sein; sonst wäre ihre Determinante 0 und damit auch die von P, im Widerspruch zur Annahme. Daher kann R nur definit oder indefinit sein.

α) R ist positiv definit:

Dann ist auch P positiv definit und es gibt daher nach (11) ganzrationale $g_1, \ldots, g_n$, für die

$$0 < P(g_1, \ldots, g_n) \leqq \alpha_n \tag{12}$$

ist.

β) R ist negativ definit:

Dann folgt aus (11): Es gibt ganzrationale $g_2, \ldots, g_n$, so daß

$$-\alpha_{n-1} \left(\frac{1-\varepsilon_0}{M}\right)^{\frac{n}{n-1}} \leqq R(g_2, \ldots, g_n) < 0$$

Nach Hilfssatz 3 ist aber $R(g_2, \ldots, g_n) \leqq -1/4$ und wir erhalten

$$-\alpha_{n-1} \left(\frac{1-\varepsilon_0}{M}\right)^{\frac{n}{n-1}} \leqq -1/4$$

und daraus

$$\frac{M}{1-\varepsilon_0} \leqq (4\alpha_{n-1})^{\frac{n-1}{n}} \tag{13}$$

γ) R ist indefinit:

Nach Induktionsannahme gibt es ganzrationale $g_2, \ldots, g_n$, so daß

$$0 < R(g_2, \ldots, g_n) \leqq p_{n-1} \cdot \left(\frac{1-\varepsilon_0}{M}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \tag{14}$$

Ich setze $a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n = a$, wähle $x_1 = g_1$, so daß

$$(g_1 + a)^2 \leqq 1/4 \tag{15}$$

wird und erhalte

$$\frac{1-\varepsilon_0}{M} P(g_1, \ldots, g_n) = (g_1 + a)^2 + R(g_2, \ldots, g_n).$$

Es ist $P(g_1, \ldots, g_n) > 0$, ja sogar $P(g_1, \ldots, g_n) \geqq M$, und somit gilt

$$\frac{1-\varepsilon_0}{M} \cdot P(g_1, \ldots, g_n) \geqq 1-\varepsilon_0. \tag{16}$$

Aus (14), (15) und (16) folgern wir

$$1-\varepsilon_0 \leqq {}^1/_4 + p_{n-1} \cdot \left(\frac{1-\varepsilon_0}{M}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

und daraus weiter

$${}^3/_4 < p_{n-1} \left(\frac{1-\varepsilon_0}{M}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \varepsilon \tag{17}$$

und schließlich

$$\frac{M}{1-\varepsilon_0} \leqq ({}^4/_3\, p_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}. \tag{18}$$

Wir fassen (12), (13) und (18) zusammen und erhalten für p_n folgenden Ausdruck:

$$p_n = \max\{\alpha_n, (4\,\alpha_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}, ({}^4/_3\, p_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}\} \tag{19}$$

Wir wenden uns nun im folgenden § 5 konkreteren Ergebnissen zu.

§ 5.

In diesem Paragraphen tritt die Gammafunktion auf. Von ihren Eigenschaften benützen wir (siehe Gröbner-Hofreiter [6])

$$\Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1), \quad p > 1 \tag{20a}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\,!, \quad n \geqq 1 \text{ ganzrat.} \tag{20b}$$

$$\Gamma({}^1/_2) = \sqrt{\pi} \tag{21a}$$

$$\Gamma(n+{}^1/_2) = \frac{(1;2;n) \cdot \sqrt{\pi}}{2^n} \tag{21b}$$

$$\frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = -E - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)} \tag{22}$$

wo $E = 0{,}5772\ldots$ (Eulersche Konstante)

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \tag{23}$$

Wir gehen vom Hilfssatz 2 aus. Die dort auftretende Schranke $\frac{2}{\pi}\{\Gamma(1+\frac{n+2}{2})\}^{\frac{2}{n}}$ bezeichnen wir mit α_n'. Aus (19) wird somit

$$p_n = \max\{\alpha_n', (4\,\alpha'_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}, ({}^4/_3\, p_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}\} \tag{19'}$$

(A) *Behauptung*: $\alpha_n' < (4\,\alpha'_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}$ für $n \geqq 2$,

ausführlich:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \{\Gamma(1+\frac{n+2}{2})\}^{\frac{2}{n}} < (\frac{8}{\pi})^{\frac{n-1}{n}} \cdot \{\Gamma(1+\frac{n+1}{2})\}^{\frac{2}{n}}.$$

Mit dieser Ungleichung ist äquivalent:

$$\Gamma(2+\frac{n}{2}) < \sqrt{\pi} \cdot 2^{n-\frac{3}{2}} \cdot \Gamma(1+\frac{n+1}{2}). \tag{24}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

α) $n = 2m$ ($m \geqq 1$, ganzrational)

(24) wird in diesem Falle zu

$$\Gamma(2+m) < \sqrt{\pi} \cdot 2^{m-\frac{3}{2}} \cdot \Gamma(m+1+{}^1/_2)$$

oder

$$(m+1)\,! < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot (1;2;m+1),$$

was für $m \geqq 1$ richtig ist, da

$$(m+1)\,! < (1;2;m+1) = 1.3.5 \ldots (2m+1),\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} > 1,\ 2^{m-1} \geqq 1.$$

β) $n = 2m+1$ ($m \geqq 1$, ganzrational)

Aus (24) erhalten wir hier

$$\Gamma(2+m+{}^1/_2) < \sqrt{\pi} \cdot 2^{2m-\frac{1}{2}}\, \Gamma(2+m)$$

oder

$$(1;2;m+2) < 2^{3m+\frac{3}{2}} \cdot (m+1)\,!$$

was für $m \geqq 1$ richtig ist, da

$$(1;2;m+2) = 3.5. \ldots (2m+3) < 2^{m+\frac{3}{2}} \cdot 8.12 \ldots (4m+4) =$$

$$= 2^{3m+\frac{3}{2}} \cdot (m+1)\,!$$

Durch Zurückschließen in beiden Fällen sehen wir, daß (24) für $n \geqq 2$ gilt, also die Behauptung (A) richtig ist.

(B) Wir haben noch den zweiten und dritten Term in (19′) zu vergleichen. Statt $({}^4/_3\, p_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}$ kann man, indem man von $p_1 = 1$ ausgeht und rekursiv schließt: $({}^4/_3)^{\frac{n-1}{2}}$ setzen.

Wir haben also

$$\{\frac{8}{\pi}(\Gamma(1+\frac{n+1}{2}))^{\frac{2}{n-1}}\}^{\frac{n-1}{n}} \gtrless (\frac{4}{3})^{\frac{n-1}{2}} \tag{25}$$

zu untersuchen. Äquivalent damit ist

$$\{\Gamma(1+\frac{n+1}{2})\}^2 \cdot (3/4)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (8/\pi)^{n-1} \gtrless 1 \tag{26}$$

Ich setze $1+\frac{n+1}{2} = x$ oder $n = 2x-3$, mache x stetig veränderlich und bilde durch Logarithmieren der linken Seite die Funktion

$$g(x) = 2\ln\Gamma(x) - (x-2)(2x-3)\ln 4/3 + 2(x-2)\ln 8/\pi$$

bzw. für die numerische Auswertung:

$$g_1(x) = 2\lg\Gamma(x) - (x-2)(2x-3)\lg 4/3 + 2(x-2)\lg 8/\pi = \lg e \cdot g(x).$$

$g(x)$ und $g_1(x)$ sind gleichzeitig $\gtrless 0$. (26) ist äquivalent mit $g(x) \gtrless 0$, und zwar mit Zeichenentsprechung. Wir suchen die Nullstellen von $g_1(x)$. Eine davon ist $x = 2$ (entspricht $n = 1$).

Wegen $g_1(10) = 0{,}62 > 0$, $g_1(10{,}5) = -0{,}11 < 0$ liegt eine weitere Nullstelle x_1 zwischen 10 und 10,5, entsprechend $n = 17$ und $n = 18$. Ich zeige, daß $g(x)$ für $x \geqq 2$ nur diese beiden Nullstellen besitzt. Ich bilde die Ableitungen

$$g'(x) = 2\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) - (4x-7)\ln 4/3 + 2\ln 8/\pi,$$

$$g''(x) = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x) - 4\ln 4/3 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2} - 4\ln 4/3,$$

$$g'''(x) = -4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^3} < 0 \qquad (\text{für } x \geqq 2).$$

Also ist, jedenfalls für $x \geqq 2$, $g''(x)$ monoton abnehmend (im strengen Sinn). Durch Einsetzen erhalten wir

$$g''(2) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2 - 4\ln 4/3 = 2(\frac{\pi^2}{6} - 1) - 4\ln 4/3 = 0{,}139\ldots$$

$$g''(3) = g''(2) - 1/2 = -0{,}361\ldots$$

Also hat $g''(x)$ in $x \geqq 2$ genau eine Nullstelle $\bar{x}$, und zwar zwischen 2 und 3. $g(x)$ ist somit konvex nach unten zwischen $x = 2$ und $\bar{x}$ und

konvex nach oben für $x > \bar{x}$. Für $x \geqq 2$ hat also $g(x)$ nur die beiden Nullstellen $x = 2$ und $x = x_1$, ist dazwischen positiv und nachher negativ. In (26) gilt also das $>$ Zeichen für $2 \leqq n \leqq 17$, für alle größeren n gilt das $<$ Zeichen. Wir erhalten somit das Ergebnis:

Ist $P(x_1, \ldots, x_n)$ eine indefinite oder positiv definite reelle quadratische Form mit der Determinante $D \neq 0$, so ist für

$$2 \leqq n \leqq 17 : 0 < P(x_1, \ldots, x_n) \leqq (8/\pi)^{\frac{n-1}{n}} \cdot \{\Gamma(1 + \frac{n+1}{2})\}^{\frac{2}{n}} \cdot |D|^{\frac{1}{n}},$$

für

$$n \geqq 18 : 0 < P(x_1, \ldots, x_n) \leqq (4/3)^{\frac{n-1}{2}} |D|^{\frac{1}{n}}$$

in ganzrationalen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ lösbar.

Für $n=2$ und 3 kann man die Werte aus Satz II und III nehmen. Für $4 \leqq n \leqq 9$ läßt sich eine Verschärfung erreichen, indem man für α_n und α_{n-1} aus (19) die bekannten scharfen Schranken für die positiv definiten Formen nimmt.

Ich nenne sie σ_n. Es ist

$$\sigma_2 = 2.3^{-\frac{1}{2}},\ \sigma_3 = 2^{1/3},\ \sigma_4 = 2^{1/2},\ \sigma_5 = 2^{2/5},\ \sigma_6 = 2.3^{-\frac{1}{6}},\ \sigma_7 = 2^{2/7},\ \sigma_8 = 2.$$

Aus (19) wird also

$$p_n = \max\{\sigma_n, (4\sigma_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}, (4/3\, p_{n-1})^{\frac{n-1}{n}}\}, \qquad (27)$$

wo $4 \leqq n \leqq 8$.

Für $n = 9$ läßt sich eine Verbesserung erzielen, indem ich verwende

$$p_9 = \max\{\alpha_9', (4\sigma_8)^{2/9}, (4/3\, p_8)^{2/9}\} \qquad (28)$$

wobei $\alpha_9' = 2/\pi\,(\Gamma(1 + 11/2))^{2/9}$ (Hilfssatz 2)

Durch Einsetzen zeigt sich, daß sowohl in (27) wie in (28) stets der mittlere Term der größte ist. — Also gilt

$$p_n = (4\sigma_{n-1})^{\frac{n-1}{n}} \quad \text{für} \quad 4 \leqq n \leqq 9$$

das sind die Werte

$$p_4 = 2\sqrt[4]{8},\ p_5 = 4,\ p_6 = 4\sqrt[6]{2},\ p_7 = 4\sqrt[7]{\tfrac{16}{3}},$$

$$p_8 = 4\sqrt{2},\ p_9 = 4\sqrt[9]{4},$$

womit Satz IV bewiesen ist.

Literatur.

[1] *Bachmann*: Die Arithmetik der quadratischen Formen, 2. Abt. (Verlag Teubner, 1923).

[2] *Blaney*: Indefinite quadratic forms in n variables (Journal London Math. Soc **23**, 153—160 (1948)).

[3] *Blichfeldt*: A new principle in the geometry of numbers with some applications. (Trans. Amer. Math. Soc. **15**, 227—235 (1914)).

[4] *Davenport*: On indefinite ternary quadratic forms (Proc. London Math. Soc., II S, **51**, 145—160 [1947]).

[5] *Davenport-Heilbronn*: Asymmetric inequalities for non-homogeneous linear forms (Journal London Math. Soc., **22**, 53—61 [1947]).

[6] *Gröbner-Hofreiter*: Integraltafel II, Bestimmte Integrale (Springer-Verlag, Wien 1950).

Über die Approximation von komplexen Zahlen durch Zahlen des Körpers K(i).

Von

Nikolaus Hofreiter, Wien.

(Eingelangt am 15. September 1951.)

§ 1.

A. V. Prasad [2] hat mit Hilfe von Kettenbrüchen gezeigt:

Zu jeder reellen Zahl ξ gibt es mindestens ein Paar von ganzen rationalen Zahlen $p, q > 0$, $(p, q) = 1$, so daß

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{2}{(\sqrt{5}+3)\, q^2}.$$

Die Konstante $\frac{2}{\sqrt{5}+3}$ ist bestmöglich, denn $\left| \xi_0 - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{C}{q^2}$ hat für $\xi_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $C < \frac{2}{\sqrt{5}+3}$ keine rationale Lösung $\frac{p}{q}$.

Ich beweise den Satz:

Zu jeder komplexen Zahl ξ gibt es mindestens ein Paar von ganzen Zahlen $p, q \neq 0$ aus dem Körper $K(i)$, $(p, q) = 1$, so daß

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{|q|^2}.$$

Die Konstante $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ist bestmöglich, denn $\left| \xi_0 - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{C}{|q|^2}$ hat für $\xi_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $C < \sqrt{2-\sqrt{3}}$ keine Lösung $\frac{p}{q}$ aus $K(i)$.

§ 2.

Sehr einfach ist der zweite Teil des Satzes zu beweisen, was jetzt geschehen soll. Wie bereits *O. Perron* [1] gezeigt hat, gilt folgender Hilfssatz: Sind $p, q \neq 0$ ganze Zahlen aus $K(i)$, $c > \sqrt{3}$, so folgt aus

$$\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c\,|q|^2}$$

die Beziehung

$$|q|^2 < \frac{1}{c\,(c-\sqrt{3})}.$$

Ist $C < \sqrt{2-\sqrt{3}}$, also $c = \frac{1}{C} > \sqrt{2+\sqrt{3}}$, so ist $|q| < 1.7$ und somit

$$\text{a) } q = \pm 1, \pm i \text{ oder b) } q = \pm (1 \pm i).$$

a) Hier kann man $\frac{p}{q} = p_1 + p_2 i$ (p_1, p_2 ganz rational) setzen. Es ist

$$\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - p_1 - p_2 i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - p_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - p_2\right)^2} \geqq$$

$$\geqq \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Also ist $\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{C}{|q|^2}$ mit $|q| = 1$, $C < \sqrt{2-\sqrt{3}}$ nicht möglich.

b) Hier genügt es, $\frac{p}{q} = \frac{p_1 + p_2 i}{1+i}$ zu setzen. Es ist

$$\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{p_1 + p_2 i}{1+i} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{(1-p_1-p_2)^2 + (\sqrt{3}+p_1-p_2)^2}.$$

Da $p_1 + p_2 = 1$, $p_1 - p_2 = -2$ gleichzeitig nicht möglich ist, so erhält man den kleinsten Wert des Radikanten für

$$p_1 + p_2 = 1,\ p_1 - p_2 = -1$$

und somit

$$\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{p_1 + p_2 i}{1+i} \right| \geqq \frac{\sqrt{3}-1}{2} > \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Also ist $\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{C}{|q|^2}$ mit $|q|^2 = 2$, $C < \sqrt{2-\sqrt{3}}$ nicht möglich und der zweite Teil unseres Satzes bewiesen.

§ 3.

Um zu erkennen, daß die Ungleichung

$$|\xi - \frac{p}{q}| \leqq \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{|q|^2}$$

für jede komplexe Zahl ξ wenigstens eine Lösung $\frac{p}{q}$ in $K(i)$, $(p, q) = 1$ besitzt, wird gezeigt: Die Kreise in der komplexen Zahlenebene um die Punkte $\frac{p}{q}$ aus $K(i)$, $(p, q) = 1$, mit den Radien $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{|q|^2}$ überdecken die Ebene lückenlos. Nun überlegen wir uns, daß es nicht notwendig ist, die ganze Ebene zu betrachten. Die ganzen Zahlen (g) aus $K(i)$ sind von der Gestalt: $g = x + iy$ (x, y ganz rational). Zu

$$\frac{p}{q} + g = \frac{p + g\,q}{q}$$

gehören für alle ganzen Zahlen g aus $K(i)$ die gleichen Kreise. Es genügt daher, sich auf den Bereich: $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ zu beschränken. Jetzt zeigen wir, daß die Geraden $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{1}{2}$ Symmetrieachsen für unsere Kreise sind. Wir gehen von $\frac{p}{q}$ aus und suchen den bezüglich $x = \frac{1}{2}$ symmetrischen Punkt. Dazu kommen wir auch, indem wir $1 - \frac{p}{q}$ an der reellen Achse spiegeln. Der gesuchte Punkt lautet somit: $1 - \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$, wo $\bar{p}$, $\bar{q}$ konjugiert zu p bzw. q sind. Wenn $(p, q) = 1$, so auch $(\bar{p}, \bar{q}) = 1$ und $(\bar{q} - \bar{p}, \bar{q}) = 1$. Zu $\frac{p}{q}$ gehört der gleiche Kreis wie zu $1 - \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$, also ist die Lagerung der Kreise bezüglich der Geraden $x = \frac{1}{2}$ symmetrisch. — Wir gehen neuerdings von $\frac{p}{q}$ aus und spiegeln an der Geraden $y = \frac{1}{2}$. Der gesuchte Punkt wird auch erhalten, indem man $1 + i - \frac{p}{q}$ an der Geraden $x = \frac{1}{2}$ spiegelt. Es geht also $1 + i - \frac{p}{q}$ in $1 - (1 - i - \frac{\bar{p}}{\bar{q}}) = i + \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$ über. Ist $(p, q) = 1$, so auch $(\bar{p}, \bar{q}) = 1$

und $(i\bar{q} + \bar{p}, \bar{q}) = 1$. Zu $i + \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$ gehört der gleiche Kreis wie zu $\frac{p}{q}$, also ist $y = \frac{1}{2}$ Symmetrieachse. Wir können uns also auf ein Viertel des Einheitsquadrates beschränken. Wir nehmen: $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$, $\frac{1}{2} \leqq y \leqq 1$. Wir zeigen, daß die Gerade $y = x$ Symmetrieachse für unsere Kreise ist. Spiegelung an dieser Geraden bedeutet: $x + i\,y \to y + i\,x$, d. h. Realteil wird mit Imaginärteil vertauscht. Es geht $\frac{p}{q}$ in $\frac{ip}{\bar{q}}$ über. Wenn $(p, q) = 1$, so auch $(i\bar{p}, \bar{q}) = 1$. Zu $\frac{p}{q}$ gehört der gleiche Kreis wie zu $\frac{i\bar{p}}{\bar{q}}$. Wir können uns auf eines der Dreiecke mit der Hypothenuse $y = x$ beschränken. Wir behalten das Dreieck mit den Eckpunkten $M_o(\frac{1+i}{2})$, $M^*(\frac{1}{2} + i)$, $M'(1 + i)$ und zeigen, daß es von unseren Kreisen lückenlos überdeckt wird.

§ 4.

Wir entwickeln hier einige Hilfsformeln. Wir schreiben die reguläre Kettenbruchentwicklung einer beliebigen positiven reellen Zahl ξ in der Form $\xi = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots}}$ oder $\xi = (q_0; q_1, q_2, \dots)$ und bezeichnen die Näherungsbrüche mit $\frac{z_k}{n_k}$. Es gilt die Determinantenrelation

$$z_k\, n_{k-1} - n_k\, z_{k-1} = (-1)^{k-1}. \tag{1}$$

Ferner gelten die Rekursionsformeln

$$z_k = q_k\, z_{k-1} + z_{k-2},\ n_k = q_k\, n_{k-1} + n_{k-2}. \tag{2}$$

Speziell für die Zahl $\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erhält man die periodische Kettenbruchentwicklung $\frac{\sqrt{3}}{2} = (0; 1, \overline{6, 2})$. Es ist also

$$q_0 = 0,\ q_1 = 1,\ q_{2k} = 6,\ q_{2k+1} = 2 \text{ für } k \geqq 1 \tag{3}$$

und es ergibt sich die Tabelle:

k	0	1	2	3	4
z_k	0	1	6	13	84
n_k	1	1	7	15	97
Z_k	1	5	19	71	265
N_k	2	6	22	82	306

wobei

$$Z_k = z_{k+1} + (-1)^k z_k,\ N_k = n_{k+1} + (-1)^k n_k. \tag{4}$$

Für die Werte (3) folgt aus (2) für $k \geqq 1$

$$\left.\begin{aligned} z_{2k} &= 6\, z_{2k-1} + z_{2k-2},\ n_{2k} = 6\, n_{2k-1} + n_{2k-2} \\ z_{2k+1} &= 2\, z_{2k} + z_{2k-1},\ n_{2k+1} = 2\, n_{2k} + n_{2k-1} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir beweisen die Formel

$$n_k - z_k = n_{k-2} + z_{k-2} \tag{6}$$

durch vollständige Induktion. Sie ist für $k = 2, 3, 4$ richtig und gelte nach Induktionsannahme für $k < j$. Aus (2) folgt

$$n_j - z_j = q_j\,(n_{j-1} - z_{j-1}) + n_{j-2} - z_{j-2}.$$

Da nach (3) $q_j = q_{j-2}$ für $j \geqq 4$ ist, so ist nach Induktionsvoraussetzung $n_j - z_j = q_{j-2}\,(n_{j-3} + z_{j-3}) + n_{j-4} + z_{j-4} = n_{j-2} + z_{j-2}$ und die Behauptung bewiesen. Aus (6) und (2) folgt

$$q_k\, n_{k-1} = q_k\, z_{k-1} + 2\, z_{k-2}, \tag{7a}$$

$$q_k\, n_{k-1} = 2\, z_k - q_k\, z_{k-1}. \tag{7b}$$

Aus (3), (7a), (7b) folgt für $k = 2\,j$ bzw. $2\,j + 1$

$$3\, n_{2j-1} = 3\, z_{2j-1} + z_{2j-2} \tag{8a}$$

$$3\, n_{2j-1} = z_{2j} - 3\, z_{2j-1} \tag{8b}$$

$$n_{2j} = z_{2j} + z_{2j-1} \tag{9a}$$

$$n_{2j} = z_{2j+1} - z_{2j}. \tag{9b}$$

Aus (4) und (5), mehrmals angewandt, folgt

$$N_{2j} = \frac{15}{4} N_{2j-1} - \frac{1}{4} n_{2j-2} + \frac{1}{4} n_{2j-3} \leqq \frac{15}{4} N_{2j-1},\ \text{für } j \geqq 2,\ \text{da}$$

$$n_{2j-2} \geqq n_{2j-3},$$

b) $N_{2j+1} = \frac{15}{4} N_{2j} - \frac{1}{4} n_{2j-1} - \frac{1}{4} n_{2j-2} < \frac{15}{4} N_{2j}$ für $j \geqq 1$,

c) $N_{2j} = \frac{37}{10} N_{2j-1} + \frac{3}{10} n_{2j-2} + \frac{5}{10} n_{2j-3} > \frac{37}{10} N_{2j-1}$ für $j \geqq 2$,

d) $N_{2j+1} = \frac{37}{10} N_{2j} + \frac{7}{10} n_{2j-1} - \frac{1}{10} n_{2j-2} > \frac{37}{10} N_{2j}$ für $j \geqq 1$,

da $7\, n_{2j-1} > n_{2j-2}$.

Daraus folgt

$$\frac{37}{10} N_{k-1} < N_k \leqq \frac{15}{4} N_{k-1}, \quad \text{für } k \geqq 3. \tag{10}$$

Es ist $\frac{11}{3} N_1 = N_2 < 4\, N_1$, daher

$$\frac{11}{3} N_{k-1} \leqq N_k < 4\, N_{k-1} \quad \text{für } k \geqq 2. \tag{11}$$

Aus (4) und (1) folgt

$$\begin{aligned} Z_k N_{k-1} - Z_{k-1} N_k &= 2(-1)^k + (-1)^{k-1}(z_{k+1} n_{k-1} - n_{k+1} z_{k-1}) \\ &= 2(-1)^k + q_{k+1} \text{ wegen (2) und (1)} \\ &= 4 \text{ für } k \geqq 1 \text{ wegen (3).} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{Z_k}{N_k} - \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}} = \frac{4}{N_k N_{k-1}} \text{ für } k \geqq 1. \tag{12}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$N_{2j} = \frac{3\, n_{2j+1} - n_{2j-1}}{2} < \frac{3\, n_{2j+1}}{2} \quad \text{für } j \geqq 1,$$

$$N_{2j-1} = \frac{n_{2j+1} - 3\, n_{2j-1}}{2} < \frac{n_{2j+1}}{2} \quad \text{für } j \geqq 1,$$

oder

$$\frac{1}{n_{2j+1}} < \frac{3}{2 N_{2j}}, \quad \frac{1}{n_{2j+1}} < \frac{1}{2 N_{2j-1}}.$$

Daraus, aus (1), (4) und (5) folgt

$$0 < \frac{1}{n_{2j} N_{2j-1}} = \frac{z_{2j}}{n_{2j}} - \frac{Z_{2j-1}}{N_{2j-1}} < \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{Z_{2j-1}}{N_{2j-1}} < \frac{z_{2j+1}}{n_{2j+1}} - \frac{Z_{2j-1}}{N_{2j-1}} =$$

$$= \frac{3}{n_{2j+1} N_{2j-1}} < \frac{3}{2 N_{2j-1}^2}$$

und

$$0 < \frac{5}{n_{2j+2}\,N_{2j}} = \frac{z_{2j+2}}{n_{2j+2}} - \frac{Z_{2j}}{N_{2j}} < \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{Z_{2j}}{N_{2j}} < \frac{z_{2j+1}}{n_{2j+1}} - \frac{Z_{2j}}{N_{2j}} =$$

$$= \frac{1}{n_{2j+1}\,N_{2j}} < \frac{3}{2\,N_{2j}^2}.$$

Es ist also

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{Z_k}{N_k} < \frac{3}{2\,N_k^2} \quad \text{für } k \geqq 1 \tag{13}$$

und daher auch

$$0 < 1 - \frac{Z_k}{N_k} < \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2\,N_k^2} \text{ für } k \geqq 1. \tag{14}$$

§ 5.

Wir betrachten folgende Kreise, die wir später zur Überdeckung benutzen:

$$K_{2j-1}: \left| z - \frac{\frac{n_{2j}+n_{2j-1}}{2} + n_{2j-1}\,i}{\frac{n_{2j}-n_{2j-1}}{2}(1-i)} \right| = \frac{C}{2\left(\frac{n_{2j}-n_{2j-1}}{2}\right)^2}$$

$$K_{2j}: \left| z - \frac{n_{2j+1} + \frac{n_{2j+1}-n_{2j}}{2}\,i}{\frac{n_{2j}+n_{2j+1}}{2}(1-i)} \right| = \frac{C}{2\left(\frac{n_{2j}+n_{2j+1}}{2}\right)^2}.$$

Da alle n_k ungerade sind, so stehen im Zähler und Nenner ganze Zahlen aus $K(i)$. Es ist

$$\frac{\frac{n_{2j}+n_{2j-1}}{2} + n_{2j-1}\,i}{\frac{n_{2j}-n_{2j-1}}{2}(1-i)} = \frac{1}{2} + \frac{n_{2j}+3\,n_{2j-1}}{2\,(n_{2j}-n_{2j-1})} \cdot i =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{z_{2j}-z_{2j-1}}{n_{2j}-n_{2j-1}} \cdot i = \frac{1}{2} + \frac{Z_{2j-1}}{N_{2j-1}} \cdot i$$

wegen (8b), (9a) und (4),

$$\frac{n_{2j+1}+\frac{n_{2j+1}-n_{2j}}{2}\,i}{\frac{n_{2j}+n_{2j+1}}{2}(1-i)}=\frac{1}{2}+\frac{3\,n_{2j+1}-n_{2j}}{2\,(n_{2j}+n_{2j+1})}\,.\,i=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{z_{2j+1}+z_{2j}}{n_{2j}+n_{2j+1}}\,.\,i=\frac{1}{2}+\frac{Z_{2j}}{N_{2j}}\,.\,i$$

wegen (8a), (9b) und (4).

Somit ergibt sich zusammengefaßt

$$K_k\colon\quad \left|z-\left(\frac{1}{2}+\frac{Z_k}{N_k}\,i\right)\right|=\frac{2\,C}{N_k^2}\quad\text{für } k\geqq 0.$$

Ferner benutzen wir noch folgende Kreise:

$$K'\colon\quad |z-(1+i)|=C$$

$$K''\colon\quad \left|z-\frac{2+3\,i}{4}\right|=\frac{C}{16}$$

$$K'''\colon\quad \left|z-\frac{-1+2\,i}{1+2\,i}\right|=\frac{C}{5}\quad\text{oder}\quad \left|z-\frac{3+4\,i}{5}\right|=\frac{C}{5}.$$

§ 6.

Wir zeigen zunächst von mehreren Punkten, daß sie innerhalb gewisser Kreise liegen.

A. Für C werde der kleinstmögliche Wert nämlich $C=\sqrt{2-\sqrt{3}}\approx$ ≈ 0.51767 gewählt.

Hilfssatz 1. Die Punkte $A_k=\frac{1}{2}+\left(\frac{Z_k}{N_k}-\frac{1}{N_k^2}\right)i$ liegen

a) in K_k für $k\geqq 1$, b) in K_{k-1} für $k\geqq 2$.

Es ist

$$\text{a)}\quad \left|A_k-\left(\frac{1}{2}+\frac{Z_k}{N_k}\,i\right)\right|=\frac{1}{N_k^2}<\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{N_k^2}$$

$$\text{b)}\quad \left|A_k-\left(\frac{1}{2}+\frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}\,i\right)\right|=\left|\frac{Z_k}{N_k}-\frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}-\frac{1}{N_k^2}\right|=\frac{1}{N_k}\left|\frac{4}{N_{k-1}}-\frac{1}{N_k}\right|$$

wegen (12).

Aus (11) folgt:

$$\frac{1}{4\,N_{k-1}}<\frac{1}{N_k}\leqq\frac{3}{11\,N_{k-1}}\quad\text{für } k\geqq 2.$$

Daher ist

$$\frac{41}{11\,N_{k-1}} < \frac{4}{N_{k-1}} - \frac{1}{N_k} < \frac{15}{4\,N_{k-1}}$$

und

$$|A_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}\,i\right)| < \frac{3\,.\,15}{11\,.\,4\,N_{k-1}^2} < \frac{2\,.\,0.512}{N_{k-1}^2} < \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{N_{k-1}^2}.$$

Hilfssatz 2. Die Punkte $B_k = \begin{cases} 0.5013 + 0.862\,i & \text{für } k = 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{7}{10\,N_k^2} + \left(\frac{Z_k}{N_k} - \frac{7}{10\,N_k^2}\right) i & \text{für } k = 1 \text{ und } \geqq 3 \end{cases}$

liegen: a) in K_k, b) in K_{k-1} für $k \geqq 2$, c) in K'.

Es ist

a) für $k = 2$: $|B_2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{19}{22}\,i\right)| < |0.0013 + 0.00164\,i| < 0.0021 =$

$$= \frac{0.5082}{2\,.\,11^2} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\,.\,11^2},$$

für $k \neq 2$: $|B_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{Z_k}{N_k}\,i\right)| = \frac{7\sqrt{2}}{10\,N_k^2} < \frac{1}{N_k^2} < \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{N_k^2}$

b) für $k = 2$: $|B_2 - (\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\,i)| < |0.0013 + 0.0287\,i| < 0.02873 =$

$$= \frac{0.51714}{2\,.\,3^2} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\,.\,3^2}$$

für $k \geqq 3$: $|B_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}\,i\right)| = |\frac{7}{10\,N_k^2} + \left(\frac{Z_k}{N_k} - \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}} - \right.$

$$\left. - \frac{7}{10\,N_k^2}\right) i| = \frac{1}{N_k} |\frac{7}{10\,N_k} + \left(\frac{4}{N_{k-1}} - \frac{7}{N_k}\right) i| \text{ wegen (12).}$$

Aus (10) folgt:

$$\frac{1}{N_k} < \frac{10}{37\,N_{k-1}} \text{ und } \frac{4}{N_{k-1}} - \frac{7}{N_k} \leqq \frac{286}{75\,N_{k-1}}.$$

Daher ist

$$B_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}\,i\right) < \frac{10}{37\,N_{k-1}^2} |\frac{7}{37} + \frac{286}{75}\,i| < \frac{2\,.\,0.517}{N_{k-1}^2} <$$

$$< \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{N_{k-1}^2}.$$

c) für $k=1$: $\left|\frac{1}{2}+\frac{7}{360}+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{360}\right)i-(1+i)\right|=$

$$=\frac{|173+67\,i|}{360}<\frac{186}{360}<\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

für $k=2$: $|0.5013+0.862\,i-(1+i)|=|0.4987+0.138\,i|<$

$$<0.5175<\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

für $k\geqq 3$: $|B_k-(1+i)|=\left|\frac{1}{2}-\frac{7}{10\,N_k^2}+\left(1-\frac{Z_k}{N_k}+\frac{7}{10\,N_k^2}\right)i\right|$.

Aus (14) folgt:

$$|B_k-(1+i)|<\left|\frac{1}{2}-\frac{7}{10\,N_k^2}+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{22}{10\,N_k^2}\right)i\right|=$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{3}-\frac{1}{10\,N_k^2}\left(22\sqrt{3}-37-\frac{533}{10\,N_k^2}\right)}<\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Hilfssatz 3. Die Punkte $A_1=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{36}\right)i$ und $B_1=$ $=\frac{1}{2}+\frac{7}{360}+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{360}\right)i$ liegen in K'''.

Es ist

a) $$\left|A_1-\frac{3+4\,i}{5}\right|=\frac{|18+i|}{5\,.\,36}<\frac{18.1}{5\,.\,36}<\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{5},$$

b) $$\left|B_1-\frac{3+4\,i}{5}\right|=\frac{|29+5\,i|}{5\,.\,72}<\frac{30}{5\,.\,72}<\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{5}.$$

Hilfssatz 4. Der Punkt $A'=\frac{1}{2}+\frac{25}{32}\,i$ liegt in K'' und K'''.

Es ist

a) $$\left|\frac{1}{2}+\frac{25}{32}\,i-\frac{2+3\,i}{4}\right|=\frac{1}{32}<\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{16},$$

b) $$\left|\frac{1}{2}+\frac{25}{32}\,i-\frac{3+4\,i}{5}\right|=\frac{|16+3\,i|}{5\,.\,32}<\frac{16{\cdot}3}{5\,.\,32}<\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{5}.$$

Hilfssatz 5. Der Punkt $C_0=\frac{6+7\,i}{10}$ liegt in K_0, K' und K'''.

Es ist

a) $$\left|\frac{6+7i}{10}-\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+2i|}{10} < \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

b) $$\left|\frac{6+7i}{10}-(1+i)\right| = \frac{|4+3i|}{10} = \frac{1}{2} < \sqrt{2-\sqrt{3}},$$

c) $$\left|\frac{6+7i}{10}-\frac{3+4i}{5}\right| = \frac{1}{10} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{5}.$$

Hilfssatz 6. Der Punkt $C_1 = \frac{17}{32}+\frac{3i}{4}$ liegt in K_0, K'' und K'''.

Es ist

a) $$\left|\frac{17}{32}+\frac{3i}{4}-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right| = \frac{|1+8i|}{2.16} < \frac{8\cdot 1}{2\,.\,16} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

b) $$\left|\frac{17}{32}+\frac{3i}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3i}{4}\right| = \frac{1}{32} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{16},$$

c) $$\left|\frac{17}{32}+\frac{3i}{4}-\frac{3}{5}-\frac{4i}{5}\right| = \frac{|11+8i|}{5\,.\,32} < \frac{14}{5\,.\,32} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{5},$$

Hilfssatz 7. Der Punkt $D = \frac{2}{3}(1+i)$ liegt in K_0 und K'.

Es ist

a) $$\left|\frac{2}{3}(1+i)-\frac{1}{2}(1+i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

b) $$\left|\frac{2}{3}(1+i)-(1+i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{3} < \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Hilfssatz 8. Der Punkt $M'' = \frac{2+3i}{4}$ liegt in K_0.

Es ist

$$\left|\frac{2+3i}{4}-\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Hilfssatz 9. Der Punkt $M^* = \frac{1}{2}+i$ liegt in K'.

Es ist

$$\left|\frac{1}{2}+i-(1+i)\right| = \frac{1}{2} < \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

B. Für C werde der Wert $C = \sqrt{2-\sqrt{3}+\frac{1}{N_{r+1}^2}}$ gewählt.

Hilfssatz 10. Für $C = \sqrt{2-\sqrt{3}+\frac{1}{N_{r+1}^2}}$ liegt der Punkt A_{r+1} in K'.

Es ist

$$|A_{r+1}-(1+i)| = \left|\frac{1}{2}+\left(1-\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}+\frac{1}{N_{r+1}^2}\right)i\right|.$$

Aus (14) folgt

$$|A_{r+1}-(1+i)| < \left|\frac{1}{2}+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2N_{r+1}^2}\right)i\right| =$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{3}+\frac{5}{2N_{r+1}^2}\left(2-\sqrt{3}+\frac{5}{2N_{r+1}^2}\right)} < \sqrt{2-\sqrt{3}+\frac{1}{N_{r+1}^2}},$$

$$\text{da } 2-\sqrt{3}+\frac{5}{2N_{r+1}^2} < 0.4 \text{ für } r > 0.$$

§ 7.

Wir behaupten zunächst:

Das Dreieck mit den Eckpunkten $M_0 = \frac{1+i}{2}$, $M' = 1+i$, $M^* = \frac{1}{2}+i$ wird von den Kreisen K', K'', K''', K_k ($k = 0, 1, \ldots, r$; r beliebige natürliche Zahl) mit $C = \sqrt{2-\sqrt{3}+\frac{1}{N_{r+1}^2}}$ vollständig überdeckt.

Ein Punkt, der in einem Kreis mit $C = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ liegt, liegt selbstverständlich auch in dem entsprechenden Kreis mit $C = \sqrt{2-\sqrt{3}+\frac{1}{N_{r+1}^2}}$. Daher gelten alle Überlegungen aus § 6 A auch für $C = \sqrt{2-\sqrt{3}+\frac{1}{N_{r+1}^2}}$.

1. Die Punkte M_0, M'', C_1, C_0, D liegen nach den Hilfssätzen 8, 6, 5, 7 n K_0. Daher liegt auch das Polygon $\mathfrak{P}(M_0, M'', C_1, C_0, D)$ in K_0.

2. Die Punkte M'', C_1, A' liegen nach den Hilfssätzen 6, 4 in K''. Daher liegt auch das Dreieck $\mathfrak{P}(M'', C_1, A')$ in K''. Daraus und aus 1. folgt: Das Polygon $\mathfrak{P}(M_0, M'', A', C_1, C_0, D)$ wird von K_0 und K'' überdeckt.

3. Die Punkte A', A_1, B_1, C_0, C_1 liegen nach den Hilfssätzen 4, 3, 5, 6 n K'''. Daraus und aus 2. folgt: Das Polygon $\mathfrak{P}(M_0, M'', A', A_1, B_1, C_0, D)$ wird von K_0, K'' und K''' überdeckt.

4. Die Punkte $A_k, B_k, B_{k+1}, A_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ liegen nach den Hilfssätzen 1, 2 in K_k. Summiert man über k von 1 bis r, so erhält man: Das Polygon $\mathfrak{P}(A_1, B_1, B_2, \ldots, B_r, B_{r+1}, A_{r+1}, A_r, \ldots, A_3, A_2)$ wird von den Kreisen K_k $(k = 1, \ldots, r)$ überdeckt. Daraus und aus 3. folgt: Das Polygon $\mathfrak{P}(M_0, M'', A', A_1, A_2, \ldots, A_r, A_{r+1}, B_{r+1}, B_r, \ldots, B_2, B_1, C_0, D)$ wird von den Kreisen K'', K''', K_k $(k=0, 1, \ldots, r)$ überdeckt.

5. Die Punkte $D, C_0, B_1, B_2, \ldots, B_{r+1}, A_{r+1}, M^*, M'$ liegen nach den Hilfssätzen 7, 5, 2, 10, 9 in K'. Daher liegt auch das Polygon $\mathfrak{P}(D, C_0, B_1, B_2, \ldots, B_{r+1}, A_{r+1}, M^*, M')$ in K'. Daraus und aus 4. folgt: Das Polygon $\mathfrak{P}(M_0, M'', A', A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}, M^*, M', D)$ wird von den Kreisen K', K'', K''', K_k $(k = 0, 1, \ldots, r)$ überdeckt. Die Punkte A_k, M'', A' liegen auf der Strecke $M_0 M^*$ und D liegt auf der Strecke $M_0 M'$. Daher ist $\mathfrak{P}(M_0, M'', A', A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}, M^*, M', D) = \mathfrak{P}(M_0, M^*, M')$ und die Behauptung bewiesen.

Da

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{2 - \sqrt{3} + \frac{1}{N_{r+1}^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

o folgt:

Das Dreieck mit den Eckpunkten $M_0 = \frac{1+i}{2}$, $M^* = \frac{1}{2} + i$, $M' = 1 + i$ wird von den Kreisen K', K'', K''', K_k $(k = 0, 1, \ldots)$ überdeckt, wenn man $C = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ wählt. Es gibt also zu jeder komplexen Zahl ξ mindestens eine Zahl $\frac{p}{q}$ aus $K(i)$, so daß

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{|q|^2}.$$

Unter den Zahlen $\frac{p}{q}$ gibt es erst recht mindestens eine, für die $(p, q) = 1$ gilt.

Literatur.

[1] *O. Perron*, Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $K(i)$. Math, Ann. **103**, 533—544 (1930), insb. § 2.

[2] *A. V. Prasad*, Note on a theorem of Hurwitz. J. London math. soc. **23**, 169—171 (1949).

[3] *E. Resatz*, Über die Approximation von komplexen Zahlen. Dissertation, Universität Wien, 1951.

Buchbesprechungen.

Repertorio di Matematiche. Herausgegeben von *M. Villa*. XX, 731 S. Padua: CEDAM. 1951. Lire 5.000.—.

Dieses Buch nimmt die Tradition des seinerzeit von *E. Pascal* herausgegebenen „Repertoriums der höheren Mathematik", von dem deutsche Bearbeitungen in mehreren Auflagen erschienen sind, wieder auf. Es ist auf das Ziel hin gerichtet, in kurzen Zusammenfassungen den Stoff aufzunehmen, der gewöhnlich in den Vorlesungen an den Universitäten geboten wird, um den Studenten und Absolventen der Lehramtsprüfung als Studienbehelf und als Handbuch zu dienen, sowohl zur Vervollständigung wie auch zum Lebendigerhalten ihres Wissens. Dementsprechend wird keine enzyklopädische Vollständigkeit angestrebt, dagegen sind die für das Verständnis wichtigen Entwicklungen etwas breiter ausgeführt; die Ergebnisse und Lehrsätze werden nicht nur angeführt, sondern auch, wenigstens in den wichtigeren Fällen, kurz begründet und bewiesen.

Der Stoff des Buches ist in 21 Kapitel unterteilt, welche einzeln von namhaften italienischen Gelehrten bearbeitet sind, und zwar folgendermaßen: I. Elemente der Zahlentheorie von *G. Ricci*. — II. Rationale, reelle und komplexe Zahlen von *P. Buzano*. — III. Algebraische Analysis von *V. Amato*. — IV. Gruppen von *G. Zappa*. — V. Algebraische und transzendente Zahlen von *G. Ricci*. — VI. Funktionen, Grenzwerte und unendliche Algorithmen von *E. Cimmino*. — VII. Euklidische und nichteuklidische Geometrie von *F. Conforto*. — VIII. Punkttransformationen von *M. Villa*. IX. Synthetische Methoden der ebenen Geometrie von *L. Campedelli*. — X. Mit Zirkel und Lineal lösbare und klassische Probleme von *R. Calapso*. — XI. Theorie der Größen und deren Äquivalenz von *U. Cassina*. — XII. Länge, Fläche und Volumen von *U. Cassina*. — XIII. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie von *S. Cherubino*. — XIV. Analytische Geometrie und Trigonometrie von *M. Villa* und *A. Agostini*. — XV. Differential- und Integralrechnung von *C. Rimini*. — XVI. Kurven und Flächen von *L. Campedelli*. — XVII. Analytische Funktionen von *G. Cimmino*. — XVIII. Vektoren von *P. Buzano* und *C. Rimini*. — XIX. Näherungsmethoden von *C. Rimini*. XX. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Finanz- und Versicherungsmathematik von *F. Sibirani*. — XXI. Geschichte der Mathematik von *A. Agostini*.

Die Benützung des Werkes wird durch ein ausführliches Stichwortverzeichnis am Schlusse des Bandes wesentlich erleichtert. Druck und Ausstattung des Buches sind erstklassig. Es ist sicher zu bedauern, daß ein ähnliches Werk in deutscher Sprache nicht vorliegt, welches für einen weiteren Leserkreis berechnet ist und unter anderem den Erfolg haben könnte, Veröffentlichungen in der Tagespresse über neue Lösungen gewisser Probleme, wie etwa die Quadratur des Kreises oder die Dreiteilung des Winkels, in Zukunft zu verhindern.

W. Gröbner, Innsbruck.

Inleiding in de Mathesis. Von *E. M. Bruins.* VI, 348 S. Amsterdam: H. J. Paris. 1951.

Da die höhere Mathematik den Anfängern meist große Schwierigkeiten macht, so sind einführende Lehrbücher sehr erwünscht. Das Buch bringt inhaltlich viel mehr als man zunächst erwartet. Es enthält: Differential- und Integralrechnung einschließlich der mehrfachen Integrale, Analytische Geometrie und Differentialgeometrie, Lineare Algebra, numerische Auflösung algebraischer Gleichungen und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Darstellung ist im allgemeinen breit und leicht verständlich. Die vielen Beispiele erleichtern die Auffassung. Manche Begriffe wie Grenzwert, Stetigkeit werden allerdings dem Anfänger große Schwierigkeiten bereiten. Daß die Darstellung eines so vielseitigen Buches nicht immer exakt ist (z. B. Kettenregel), wird man ohnehin erwarten. Die zahlreichen Figuren sind nicht im Text, sondern in einem eigenen Heft. Sie sind sehr zart gezeichnet und nicht immer einwandfrei (z. B. Fig. 92a). Das Buch wird gewiß viele Leser finden, die daraus viel lernen können.

N. Hofreiter, Wien.

Algèbre des Ensembles. Von *W. Sierpinski.* (Monografie Matematyczne: Band XXIII.) 205 S. Warschau. 1951.

Es versteht sich von selbst, daß das Werk eines der berufensten Fachgelehrten einen ausgezeichneten Eindruck hinterläßt, doch soll gleich anfangs betont werden, daß auch die didaktische Seite als besonders geglückt angesehen werden muß: Die Darstellung geht stets vom Elementaren aus und doch sieht man sich plötzlich immer wieder an schwierige zum Teil noch ungelöste Probleme ungezwungen herangeführt. Dies wird dadurch erreicht, daß über viele weitergehende Ergebnisse mit zahlreichen Literaturangaben referiert wird und sich oft interessante Dinge in den jedem Paragraphen beigegebenen Übungen finden, die der Verf. fast durchwegs mit ausführlichen Lösungen oder Beweisen versehen hat. Es ist überhaupt zu vermerken, daß eine Unzahl von Literatur verarbeitet wurde. Fast jede Seite enthält Fußnoten mit diesbezüglichen Hinweisen. Das erste Kapitel ist einer Einführung in die Aussagen- und Prädikatenlogik gewidmet. Um die Analogie zwischen Algebra der Logik und der Mengen besser hervortreten zu lassen, vertauscht der Verf. die Bezeichnung von Hilbert-Bernays für Konjunktion und Disjunktion. Der Mengenbegriff wird so gefaßt, daß eine Menge definiert ist, wenn feststeht, ob ein Element zu ihr gehört oder nicht. Von hier aus wird — nicht systematisch — eine Axiomatisierung der Mengenlehre im Wesentlichen nach Fraenkel-Zermelo entwickelt, was ohne Zweifel sehr das Verständnis für die Formalisierung der Theorie fördert. Übrigens wird auf den axiomatischen Aufbau später nur mehr gelegentlich Bezug genommen. Hier und auch später bedient sich der Verf. ausgiebig der im ersten Kapitel entwickelten Begriffe und Schreibweise. Das nächste Kapitel ist den elementaren Mengenoperationen gewidmet. Immer nimmt der Verf. stets Gelegenheit auf Querverbindungen hinzuweisen, so etwa zur Booleschen Algebra und zur Verbandstheorie. Nun kommt der Funktionsbegriff an die Reihe. Es soll erwähnt werden, daß besonders in diesem Abschnitt u.a. die Tatsache in ein helles Licht gerückt wird, daß gerade die Theorie der endlichen Mengen zahlreiche reizvolle Probleme in sich birgt. Jetzt wird auch das Auswahlaxiom formuliert und mehrere äquivalente Formen wiedergegeben (z. B. das Theorem von Zorn). Erwähnung finden auch die Gödelschen Untersuchungen über die Verträglichkeit des Auswahlpostulates mit dem Axiomensystem von

ernays. Einen gewissen Höhepunkt stellt das Theorem von Banach dar, welches anach für eindeutige Funktionen beim Studium des Äquivalentsatzes von antor-Bernstein entdeckt hat und in dieser Form auch noch in des Verf. „Leçons ır les nombres transfinis" zu finden ist, jetzt aber in der allgemeinen von naster und Tarski herrührenden Fassung geboten wird. Schließlich sei noch as Theorem von D. König über mehrdeutige Abbildungen erwähnt, welches nen bekannten Bernsteinschen Satz über die Division von Kardinalzahlen urch endliche Zahlen enthält. Das Kapitel schließt mit einem Hinweis auf llgemeine topologische und metrische Räume. Inhaltsreich ist auch das letzte apitel über Mengenfamilien. Interessant ist ein sehr allgemeines Induktionsrinzip für total additive Familien von Untermengen einer gegebenen Menge. ach Einführung der Begriffe Ring, Körper wendet sich die Darstellung schließch den Souslinschen Mengen zu, deren Theorie ja neben Souslin selbst und usin der Verf. sehr gefördert hat und geht dann kurz auf die interessanten ntersuchungen von Kantorovitsch und Levinson über analytische Operationen n, welche die beiden Autoren seinerzeit im Anschluß an Studien von *Hausdorff* nd *Kolmogoroff* durchgeführt haben. — Alles in allem ein sehr schönes Buch, elches von jedem, der über eine gewisse Höhe des abstrakten Denkens verfügt, it Gewinn gelesen werden kann. An den Verlag, der um ein schönes Druckbild folgreich bemüht war, wird man die Bitte richten, darnach zu trachten, Druckngenauigkeiten (Verdrucken von Buchstaben), welche manchesmal beinahe nnstörend wirken, nach Möglichkeit noch mehr zu vermindern, als das hier er Fall war.

L. Schmetterer, Wien.

ber Abels Verallgemeinerung der binomischen Formel. Von *H. Salie*. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: 98/4.) Berlin: Akademie-Verlag. 1951.

Es wird eine sehr allgemeine Identität hergeleitet, aus der sich unter anderem ie folgende Abelsche Verallgemeinerung des Binomialsatzes als Spezialfall rgibt: $\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (x + s\,a)^{s-1} (y - s\,a)^{n-s} = (x + y)^n/x$.

K. Prachar, Wien.

he Algebra of Vectors and Matrices. Von *Th. Wade*. IX, 189 S. Cambridge, USA: Addison-Wesley Press, Inc. 1951. $ 4.50.

Das Buch ist in erster Linie ein für Studierende gedachtes einführendes Lehruch über lineare Algebra. An Vorkenntnissen wird nur wenig über Determianten vorausgesetzt. Es beginnt mit den grundlegenden Begriffen der modernen lgebra, was den Vorteil hat, später Beispiele genügender Allgemeinheit bringen können. Dann folgt die Vektorrechnung in der Ebene, im gewöhnlichen Raum nd im R_n. Der größte Teil des Buches ist der Matrizenrechnung gewidmet. uletzt werden Anwendungen der linearen Algebra in der Technik und Statistik it Literaturangaben gegeben. Die Darstellung ist pädagogisch sehr gut, om Einfachen ausgehend und langsam zu Schwierigerem vordringend. Beiiele, Aufgaben samt Lösungen tragen ferner dazu bei, das Buch für Studierende sonders geeignet zu machen. Bei der großen Bedeutung der linearen Algebra r verschiedene Diszipline ist auch dieses einführende Buch willkommen und stens zu empfehlen.

N. Hofreiter, Wien.

Finite Matrices. Von *W. L. Ferrar.* VII, 182 S. Oxford: At the Claredon Press. 1951. 17 s. 6 d. net.

Da Matrizenrechnung eine wichtige Hilfsdisziplin der Mathematik und der theoretischen Physik geworden ist, so ist es verständlich, daß immer wieder Bücher darüber erscheinen. Dieses Buch wendet sich weniger an Spezialisten, sondern an einen größeren Leserkreis, der die Hauptsätze der Matrizenrechnung kennen lernen will. Vorkenntnisse werden nur ganz wenige vorausgesetzt. Das Buch beginnt mit den Elementen der Matrizenrechnung. Die Darstellung ist klar. Die Beweise werden im allgemeinen ausführlich gebracht, nur manche Details sind weggelassen, was bei einem einführenden Lehrbuch zu bedauern ist. Einen breiten Raum nehmen die verschiedenen Äquivalenzbegriffe und die dabei auftretenden Normalformen und Reduktionen ein. Dazu gehört auch die Elementarteilertheorie. Neue Wege geht der Verfasser im Abschnitt über unendliche Reihen von Matrizen und Funktionen von Matrizen. Dieser Abschnitt ist wohl der wertvollste. Alles in allem liegt ein Buch vor, das die ohnehin reichliche Anzahl von guten Büchern über Matrizen noch um eines erhöht.

N. Hofreiter, Wien

Über magische Quadrate und lineare Gitterpunktprobleme. Von *W. Schnee.* (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: 98/1.) 47 S. Berlin: Akademie-Verlag, 1951. DM 4.65.

Betrachtet werden quadratische Matrizen mit 3 Zeilen, deren Elemente voneinander verschiedene ganze Zahlen sind. Die Summe der Elemente jeder Zeile und jeder Spalte habe einen vorgegebenen Wert s (semimagische Quadrate). Ist das Element links oben gleich 1, so soll von einem Normalquadrat gesprochen werden. Die Arbeit befaßt sich mit dem Problem, die Anzahl $f(s)$ der Normalquadrate zu ermitteln, und führt es auf ein zahlengeometrisches zurück, nämlich die Anzahl der Gitterpunkte in einem Tetraeder unter gewisser Nebenbedingung zu finden. Es werden explizite Anzahlformeln erhalten. *N. Hofreiter*, Wien

Allgemeine Theorie der Gauß'schen Summen in algebraischen Zahlkörpern. Von *H. Hasse.* (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften: Jahr-1951, Nr. 1.) 23 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1951. DM 3.—.

Der Verf. entwickelt hier eine systematische Theorie der *Gauß*schen Summen (*GS*), und zwar hinsichtlich ihrer formalen Grundlagen. Für den rationalen Grundkörper hat dies der Autor bereits im letzten Kapitel seiner „Vorlesungen über Zahlentheorie" Springer-Verlag (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. LIX) 1950 getan. Die allgemeine *GS* im Zahlkörper K hängt von einem Kongruenzcharakter in der Divisorengruppe von K, einem Erklärungsmodul dieses Charakters, der also ein Vielfaches seines Führers ist, und einem Hilfsdivisor von K ab. Durch 3 Reduktionsschritte (I. Allgemeine *GS* auf primitive *GS*; II. Primitive *GS* auf eigentliche *GS*, bei welchen der Erklärungsmodul mit dem Führer zusammenfällt; III. Parameterreduktion) werden die *GS* auf normierte *GS* zurückgeführt, die nur von dem Charakter abhängen. Um nun die bekannte Komponentenzerlegung des rationalen Spezialfalles auch im allgemeinen Fall durchführen zu können, ist es notwendig, jedem Divisorencharakter einen Zahlcharakter zuzuordnen. Dadurch lassen sich die *GS* durch die echten eigentlichen *GS* zu Zahlcharakteren

von Primdivisorpotenzführern ausdrücken. Damit ist es jetzt möglich, die Betragformel herzuleiten. Liegt der Primdivisor $\mathfrak{p}$ in der ersten Potenz vor (regulärer Fall), so stellt sich heraus, daß diese *GS* mit den *GS* im Restklassenkörper modulo $\mathfrak{p}$ identisch sind (*H. Davenport-H. Hasse*, J. f. r. a. Math. **172**, 151—182) (1934). Für den allgemeinen Fall wird eine Vermutung ausgesprochen.

Die Bedeutung dieser Arbeit ist klar. *E. Hlawka*, Wien

Geometrisch anschauliche Auflösung linearer mit Nullkoeffizienten ausgestatteter Gleichungssysteme. Von *K. Friedrich* und *W. Jenne*. (Veröffentlichungen des Geodätischen Institutes in Potsdam: Nr. 5.) Berlin: Akademie-Verlag. 1951.

Es wird hier ausführlich ein Verfahren besprochen, welches zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen dient, bei denen gewisse Koeffizienten Null sind. Das Verfahren, welches von *K. Friedrich* herrührt, bringt für die in der Geodäsie auftretenden oft langwierigen Berechnungen große Vereinfachungen mit sich. Es bedient sich graphischer Methoden in Verbindung mit der Theorie der Kettenbrüche. Im Anhang befindet sich eine Berichtigung eines von *O. v. Gruber* angegebenen Formelsystems. *K. Prachar*, Wien

Calculus and Analytic Geometry. Von *G. Thomas*. 685 S. Cambridge, USA: Addison-Wesley Press, Inc. 1951. $ 6.—.

Das Buch bringt ungefähr das, was an unseren technischen Hochschulen in der Vorlesung Mathematik I gelehrt wird, also in erster Linie: Differential- und Integralrechnung, daneben Analytische Geometrie, Vektorrechnung, Determinanten und etwas Funktionstheorie. Es setzt noch weniger voraus, als unsere Studenten von der Mittelschule mitbringen. Die Darstellung ist so breit und so gut verständlich, daß das Buch sogar zum Selbststudium vortrefflich geeignet ist. Immer wird von konkreten Problemen ausgegangen, an mehreren Beispielen illustriert und erst dann zu einer exakten Formulierung übergegangen. Besonders zahlreich sind die Beispiele, die teils der reinen Mathematik, teils der angewandten Mathematik entnommen sind. Auf Anwendungen wird sehr großer Wert gelegt, weshalb das Buch besonders angehenden Physikern und Ingenieuren zu empfehlen ist. Die Anordnung des Stoffes ist so: zuerst Differentialquotient, dann das unbestimmte und das bestimmte Integral; erst dann wird der Logarithmus durch das Integral definiert und die Exponentialfunktion als Umkehrfunktion des Logarithmus definiert. Dies ist die Anordnung, die auch für die beste halte. Wenn auch die Darstellung anschaulich und breit ist, so wird doch ein schönes Niveau erreicht. Der Verf. beweist manches nicht, z. B. die Existenz der Partialbruchzerlegung, die Existenz der mehrfachen Integrale, Sätze über Differentiation und Integration von Reihen, Unbestimmte Formen $^0/_0$; er schwindelt aber nicht hinweg, sondern verweist auf gute Lehrbücher. Die zahlreichen Figuren sind gut und kommen klar heraus. Das Buch soll später ersetzt werden. Vorläufig ist es photomechanisch hergestellt. Dies hat den Vorteil, daß es relativ billig ist, aber den Nachteil, daß der Kleindruck zwar lesbar, aber doch vielfach schwach erscheint. *N. Hofreiter*, Wien

Rekursive Funktionen. Von *R. Peter*. 206 S. Budapest: Akademischer Verlag. 1951.

„Eben darum wurde dieses Buch geschrieben, daß es auch von in der mathematischen Logik Unkundigen ohne Schwierigkeit gelesen werden könne". Mit

diesen Worten beschreibt der Verfasser selbst den großen Kreis von Lesern, an den sich das Buch wendet. Es ist ganz elementar geschrieben und fast ohne Vorkenntnisse verständlich. Rekursive Funktionen sind solche Funktionen einer ganzzahligen positiven Variablen, deren Werte sich an allen konkret vorgegebenen Stellen in einem gewissen, genau präzisierten Sinne effektiv berechnen lassen. Solche Funktionen kommen auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (bei einer Präzisierung der *Mises*'schen Wahrscheinlichkeitsdefinition) und in den Naturwissenschaften vor. Der Aufbau der Theorie ist nicht formalistisch, sondern beruft sich auf die unmittelbare Evidenz. Nachdem anfangs eine genügende Anzahl von konkreten Beispielen rekursiver Funktionen bereitgestellt wird, wird der Begriff der primitiven Rekursion definiert. Von da aus ergeben sich nacheinander immer kompliziertere Formen der Rekursion bis zum Begriff der allgemein rekursiven Funktion. Hier finden auch neuere Untersuchungen von *Skolem*, *Kleene* und *A. Markov* Platz. Ein interessanter Abschnitt gibt eine Diskussion der sogenannten Turing-Maschine zur Definition der „mechanischen Berechenbarkeit" einer Funktion. Ein geschichtlicher Überblick bringt in sehr klarer Form die Problemstellungen der Grundlagenforschung. Im Anschluß daran werden noch gewisse Entscheidbarkeitsprobleme behandelt.

Der Verfasser hat es in diesem schönen Buch verstanden, mit großem Geschick auch schwierigere Dinge vollkommen klar zu machen. Das Werk kann daher allen Freunden der mathematischen Logik und solchen, die es werden wollen, bestens empfohlen werden. *K. Prachar*, Wien.

The Theory of Functions of a Real Variable. Von *R. L. Jeffery*. (Mathematical Expositions: 6.) XIII, 232 S. Toronto: University of Toronto Press. 1951.

Das Buch behandelt fast ausschließlich die reelle Funktionentheorie von Funktionen einer Variablen. Funktionen mehrerer Variabler werden nicht in Betracht gezogen. Auf die Theorie der Mengenfunktionen wird kaum mehr Bezug genommen, als es die *Lebesgue*'sche Theorie wünschenswert erscheinen läßt. Der eigentliche Gegenstand des Buches wird aber anziehend und sehr ausführlich behandelt. Ausgegangen wird von den natürlichen Zahlen, doch schreitet der Verf. unter Berufung auf die Elementargeometrie sehr rasch zu den Irrationalzahlen vor und setzt dann für das weitere das Rechnen mit den reellen Zahlen als aus den Anfangsgründen bekannt voraus. Zunächst wird das äußere *Lebesgue*'sche Maß eingeführt und vermöge des Begriffes der metrischen Separierbarkeit von Mengen durch Betrachtung einer Menge und ihres Komplements die Meßbarkeit eingeführt. Aus dem weiteren Inhalt soll ein leicht verständlicher Beweis des Ergodentheorems von *Birkhoff* hervorgehoben werden. Beim Studium der Umkehrung der Derivation stößt der Verf. bis zum Begriff des speziellen Denjoy-Integrales vor und gibt weitere Hinweise auf die Theorie von Denjoy-Chintschin. Ein ganzes Kapitel ist den Derivierten von Funktionen gewidmet und hier findet sich auch *Besicovitch's* Beispiel einer Funktion ohne einseitige Derivierte, welches im Anschluß an *Pepper* dargestellt wird. Die Ausführungen werden mit einer Besprechung des *Riemann-Stieltjes*'schen Integrals und einem Ausblick auf die *Schwartz*'schen Ideen abgeschlossen. Übrigens wird das gewöhnliche *Riemann*'sche Integral anläßlich der Definition des *Lebesgue*'schen nur gestreift. Wie alle Bücher dieser Sammlung zeichnet sich auch dieses durch klaren Druck aus und erfüllt gut die gestellte Aufgabe, dem Studierenden ein grundlegendes Wissen über die behandelte Disziplin zu vermitteln. Schade nur, daß eine Reihe von Druckfehlern (z. B. unrichtige Hinweise auf die Bibliographie und andere Druckungenauigkeiten, etwa beim

Beweis des Ergodentheorems) vorhanden sind. Jedes Kapitel schließt mit einer Reihe von Problemen, welche vielfach der Erweiterung des Gesichtskreises dienen (z. B. das Theorem von *Egoroff*) und zum Teil mit Literaturhinweisen versehen sind.

L. Schmetterer, Wien

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen. Von *H. W. E. Jung*. VI, 462 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1951.

Bekanntlich ist die Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Veränderlichen ungleich verwickelter als die der Funktionen einer Variablen. In diesem umfassenden Werk wird erstmalig die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Veränderlichen in einem Lehrbuch dargestellt. Der Verfasser, dem die Theorie selbst ganz wesentliche Beiträge verdankt, erscheint zu dieser gewiß nicht leichten Aufgabe besonders berufen. Man kann wohl sagen, daß er sie in vorbildlicher Weise gelöst hat. In einer längeren Einleitung werden am Beispiel des Körpers $K(x, y)$ die Begriffe: Stelle, Primteiler, Stellentransformation eingeführt und erläutert. Die Begriffe: Stellen, Primteiler, Divisoren und Divisorenklassen in einem über $K(x, y)$ algebraischen Körper werden in Teil 1 genauer untersucht. Teil 2 ist dem Beweis des *Riemann-Roch*schen Satzes gewidmet. Teil 3 behandelt die sog. Stellentransformation, d. h. den Übergang von einer Stellendefinition zur anderen und Anwendungen auf birationale Transformationen. Nun folgen (Teil 4) die Differentiale, welche besonders ausführlich behandelt werden. Hier finden sich wesentliche Ergänzungen zu den Untersuchungen *Picard*'s. Teil 5 bringt die Theorie der Divisorenscharen und Korrespondenzen mit einem neuen Zusammenhang der Integrale 2. und 3. Gattung. Den sogenannten Punktsätzen und der Untersuchung der *Severi*'schen sowie der *Zeuthen-Segre*'schen Invariante ist der 6. Teil des Buches gewidmet. Im 7. und letzten Teil werden noch einige spezielle Probleme behandelt, z. B. Flächen mit einem Büschel rationaler Kurven.

Diese flüchtige Übersicht gibt ein nur unvollständiges Bild von der Reichhaltigkeit des groß angelegten Werkes. Dabei ist noch die besondere Gründlichkeit hervorzuheben, mit der der ganze Stoff bearbeitet wird. Zahlreiche in allen Einzelheiten durchgerechnete Beispiele erläutern alle Begriffe und Sätze. Gerade bei einem so abstrakten Gebiet ist das für jeden Leser von besonderem Wert, da er so nie den Boden des Konkreten verliert. Man muß dem Verfasser für die große Mühe dankbar sein, die ihm dieses ausgezeichnete Werk zweifellos bereitet hat.

K. Prachar, Wien

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von *G. Hoheisel*. Vierte Auflage. (Sammlung Göschen: Nr. 920.) 129 S. Berlin: W. de Gruyter. 1951. DM 2.40.

Das Buch enthält gewöhnliche Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung, insbesondere lineare Differentialgleichungen, und Randwertaufgaben. In der neuen Auflage wurde der Paragraph über singuläre Stellen von Differentialgleichungen 2. Ordnung weggelassen, zu dessen Verständnis funktionentheoretische Kenntnisse notwendig waren; es wurden mehrere Paragraphen umgearbeitet und erweitert, z. B. Adjungierte einer Differentialgleichung, Eigenwerte und Eigenfunktionen, Nicht-Liouvillesche Systeme, Nullstellen von Lösungen. Das Buch zeichnet sich durch knappe, exakte und doch gut verständliche Darstellung aus; es bringt die wichtigsten Sätze über gewöhnliche Differentialgleichungen und ist somit als einführendes Lehrbuch bestens zu empfehlen. Besprechungen früherer Auflagen in Mh. Math. **33**, 17 und **37**, 38.

N. Hofreiter, Wien

Statistische Methoden für Naturwissenschafter, Mediziner und Ingenieure. Von *A. Linder*. Zweite Auflage. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe: Band III.) 238 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1951. Geb. sfr. 30.—.

Die Tatsache, daß nicht allzulange nach dem Erscheinen des Buches eine zweite Auflage erforderlich wurde, zeigt deutlich, daß das Werk seinem Zweck gerecht geworden ist. Für eine Besprechung der 1. Auflage vgl. man Mh. 52. 357—58 (1948). Der äußere Aufbau ist auch in der 2. Auflage beibehalten worden, (Zunächst Rezepte für den Praktiker, dann deren theoretische Grundlagen). Bedenken dagegen hat der Erfolg zum Schweigen gebracht. Es sind aber wesentliche Erweiterungen vorgenommen worden. Wir erwähnen nur die ausführlichere Behandlung der Praxis und Theorie der Regression, die D^2-Schätzfunktion von Mahalanobis und den sehr begrüßenswerten Entschluß des Verf., nun auch einiges über die Varianzanalyse aufzunehmen, welche sich ja heute in der Anwendung großer Beliebtheit erfreut. Das Werk wird in seiner neuen Gestalt dem Praktiker noch bessere Dienste leisten als bisher. *L. Schmetterer*, Wien

Statistics. Au Intermediate Text Book. Von *N. L. Johnson* und *H. Tetley*. Band I. Mit Textabb., XII, 294 S. Cambridge: At the University Press. 1949. Geb. 20 s. net.

Das vorliegende Buch stellt eine leicht lesbare Einführung in die mathematische Statistik dar und nimmt seinem Zwecke entsprechend dabei vielfach auf die Bedürfnisse des Versicherungsmathematikers Rücksicht. Zunächst wird die allgemeine Situation der Statistik beschrieben und alle wesentlichen statistischen Maßzahlen werden eingeführt. Dann kommt der Begriff der Wahrscheinlichkeit, und zwar wird — wie dies nunmehr schon vielfach üblich geworden ist — die Häufigkeitsauffassung axiomatisiert. Im Weiteren findet man neben der *Tschebyscheff*'schen Ungleichung auch die *Gauß*'sche, welche in zahlreichen praktisch wichtigen Fällen viel schärfere Schranken liefert. Nach Besprechung der wichtigsten Verteilungen wird das Prüfen von statistischen Hypothesen gebracht, wobei die Verf. mit didaktischem Geschick sehr behutsam vorgehen. In diesem Bande werden nur Großzahlstichproben betrachtet. (Der 2. Band wurde schon an anderer Stelle besprochen). Es wird das Auslangen mit der Normalverteilung gefunden. Die Prüfverfahren werden zum Teil ohne tiefergehende Begründung rezeptartig zusammengestellt. Im Anhang findet man *Sheppard*'s Korrekturen bei Zusammenfassung statistischer Daten in Gruppen, die *Stirling*sche Formel und die Beweisführung für den Übergang von der Binomial- zur Normalverteilung, die man angesichts der Bedeutung der Aussage vielleicht lieber im Text gesehen hätte — sowie eine Tafel des Fehlerintegrales und der zugehörigen Dichte. Das sehr verwendbare Buch enthält zahlreiche Aufgaben, welche am Schluß des Bandes mit Lösungsandeutungen versehen sind. Der Student der Versicherungswissenschaften sollte diese hübsche Einführung gelesen haben. *L. Schmetterer*, Wien

Introduction to Statistical Method. Von *B. C. Brookes* und *W. F. L. Dick*. Teil I und II. Mit 56 Textabb., IX, 288 S. Melbourne-London-Toronto: W. Heinemann. Ltd. 1951. Geb. 21 s. net.

Die statistische Durchdringung der verschiedensten Zweige der Wissenschaft und Wirtschaft in den angelsächsischen Ländern muß — nach dem enormen Bedarf an Lehrbüchern für Statistik zu schließen — bereits unvorstellbares

Ausmaß angenommen haben. Das vorliegende Buch wird jedenfalls zur Verbreitung statistischer Kenntnisse beitragen, denn es ist elementar geschrieben und der Text von so vielen Beispielen und Übungen begleitet, daß man geradezu voraussetzungslos an die Lektüre herangehen kann. Auf theoretische Fundierung wird demgemäß nicht allzu großer Wert gelegt, aber eine Reihe von Techniken der modernen Statistik wie Stichprobenverfahren für normale Grundgesamtheiten, Prüfung von Häufigkeiten mittels des χ^2-Verfahrens und schließlich das Anlegen von Planversuchen kann der Praktiker leicht aus der Darstellung lernen. Weitergehende Literaturhinweise und einige Tafeln für den Gebrauch bei Verwendung der üblichen Prüfverteilungen bilden den Abschluß.

L. Schmetterer, Wien

Praktische Mathematik. Von *H. von Sanden*. Zweite Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 44.) Mit 25 Textabb., 120 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ 0.92.

Da in den grundlegenden Vorlesungen an den Hochschulen stets die Theorie in den Vordergrund gestellt wird, so sind Übungen und Seminare von Wichtigkeit, in denen gezeigt wird, wie praktisch gerechnet wird. Dafür bietet das vorliegende Buch vorzügliches Material. Es enthält zahlreiche zeichnerische und numerische Verfahren aus der Differential- und Integralrechnung, aus der Statistik und der Ausgleichsrechnung. Überaus groß ist die Zahl der Beispiele, die vollständig durchgerechnet werden. Die Rechnungen sind der gewünschten Genauigkeit angepaßt und es wird gezeigt, wie unnötige Rechenarbeit zu vermeiden ist. Die vielen Winke für die praktische Durchführung sind besonders wertvoll. Die Darstellung ist ausführlich und so breit, daß das Buch auch von Studierenden der technischen Hochschulen und deren Absolventen gelesen werden kann.

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra. Von *E. Sperner*. 2. Teil. Mit 28 Textabb., 289 S. (Studia Mathematica / Mathematische Lehrbücher: Band VI.) Göttingen: Verlag Vandenhoeck u. Ruprecht. 1951. DM 21.80.

Die Anlage des Buches ist im wesentlichen die gleiche wie seinerzeit im gleichbetitelten Buch von Schreier-Sperner. Es enthält Körpertheorie, Gruppentheorie, Matrizenrechnung und projektive Geometrie. Aber alle Abschnitte sind mehrfach umgearbeitet worden. Die Darstellung ist exakt, leicht verständlich und noch breiter als früher. Auf Methoden, insb. konstruktiver Art wird mehr Gewicht gelegt. In der Matrizenrechnung wurde die Elementarteilertheorie weggelassen, dafür die Hauptachsentransformation selbständig und ausführlich abgeleitet. Den größten Raum nimmt wieder die projektive Geometrie des n-dimensionalen Raumes ein. Sie führt bis zu einer projektiven, affinen und metrischen Klassifikation der Hyperflächen zweiten Grades im Sinne des Erlanger Programms. Der Abschnitt über das Doppelverhältnis ist fast ganz neu. Mit dem vorliegenden zweiten Band ist ein hervorragendes Werk über n-dimensionale analytische Geometrie, in dem die Algebra stark betont ist, abgeschlossen.

N. Hofreiter, Wien

Die Dreiteilung des Winkels. Von *W. Breidenbach*. Zweite, erweiterte Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek: Lietzmann Reihe I.) Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ 0.55.

Das Büchlein stellt eine für die Schüler der beiden Oberklassen von österr. Realschulen oder deutschen Oberschulen verständliche Monographie dar. Im Beginn ist ein algebraischer Teil, der mit dem Unmöglichkeitsbeweis bei bloßer Verwendung von Zirkel und Lineal schließt. Es folgen Lösungen mit Hilfe des Einschubverfahrens, mit Hilfe von Kegelschnitten und von höheren Kurven, Dreiteilungsinstrumente, Näherungsverfahren. Hier wurden auch die Lösungen von *Karajordanoff* (1928) und *Kopf* (1929) aufgenommen.

Die kleine Schrift kann als Ergänzung des Schulunterrichtes und als Grundlage für Arbeitsgemeinschaften bestens empfohlen werden.

J. F. Lewandowski, Wien

Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Von *P. Finsler*. IX, 160 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1951. Geb. sfr. 14.80.

Die 1918 erschienene Göttinger Dissertation von *P. Finsler* ist so bekannt und hat auf die Entwicklung der geometrischen Forschung in den letzten drei Jahrzehnten einen so starken Einfluß ausgeübt, daß es müßig wäre, auf ihren Inhalt einzugehen. Dem rührigen Verlag Birkhäuser sind wir zu großem Dank verpflichtet, daß er diese wichtige Arbeit durch einen photomechanischen Neudruck nunmehr allgemein zugänglich gemacht und durch ein nach Jahren geordnetes Literaturverzeichnis (bis 1950) ergänzt hat, das — ohne das Autorenregister — über 20 Seiten umfaßt und von *H. Schubert* mit großer Sorgfalt hergestellt wurde.

J. Radon, Wien

Lectures on Classical Differential Geometry. Von *D. J. Struik*. VIII, 221 S. Cambridge, USA: Addison-Wesley Press, Inc. 1950. $ 6.—.

Der um die neuere Differentialgeometrie wohlverdiente Verf. legt hier ein kleines Lehrbuch zur ersten Einführung in vielbehandelten Gegenstand vor. Er beschränkt sich hierbei auf die „klassischen" Methoden, verzichtet daher auf die spezifischen Rechenmethoden „modernen" Schlages (Tensorkalkül, alternierende Differentialformen). Zu rühmen sind die klare und saubere Darstellung, die das Buch zum Selbststudium sehr geeignet machen dürfte, die reichlichen historischen und bibliographischen Notizen und das geschickt gewählte Aufgabenmaterial. Die zahlreichen Abbildungen reproduzieren z. T. solche aus älteren Werken (*Scheffers*, *Hilbert-Cohn Vossen*) sowie Modelle der *Brill*'schen Sammlung und sind so gewählt, daß eine wirklich gute Veranschaulichung auch komplizierterer Verhältnisse erreicht wird. Die Kapitelüberschriften: Kurven-Elementare Flächentheorie — Die Grundgleichungen — Geometrie auf einer Fläche — Einige spezielle Probleme mögen den Inhalt des Buches umreißen, das als Einführung in den Gegenstand bestens empfohlen werden kann.

J. Radon, Wien

Bemerkungen über die Verbiegung hyperbolisch gekrümmter Flächenstücke. Von *H. Beckert*. (Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften; Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Band 98, Heft 4.) Berlin: Akademie-Verlag, G. m. b. H. 1951.

Die *Gauß*'sche und die *Mainardi Codazzi*'schen Gleichungen stellen die Integrabilitätsbedingungen für die Ableitungsgleichungen der Flächentheorie dar. Durch eine Umformung dieser Gleichungen gelingt es dem Verf., aus Exi-

enz- und Eindeutigkeitssätzen für Systeme quasilinearer Differentialglei-hungen Folgerungen über die Gesamtheit derjenigen Flächen zu ziehen, die n eine vorgegebene hyperbolisch gekrümmte Fläche verbiegbar sind.

K. Prachar, Wien

lassical Mechanics. Von *H. Goldstein*. Mit Textabb., XII, 399 S. Cambridge, USA: Addison-Wesley Press, Inc. 1951. Geb. $ 7.—.

Das Buch hat sich zum Ziel gesetzt, die klassische Mechanik unter beson-erer Betonung derjenigen Partien darzustellen, welche für die moderne Physik on Bedeutung sind.

Die wichtigsten Abweichungen von dem üblichen Weg, die sich in Verfolgung ieses Zieles einstellen, sind wohl die folgenden:

Es wird gleich im ersten Kapitel die Bewegung einer Punktladung im elektro-nagnetischen Feld behandelt, bereits im zweiten Kapitel wird das *Hamilton*'sche 'rinzip eingeführt, die Behandlung des Zweikörperproblems gibt Anlaß zur Berechnung der Streuung von Partikeln an einem (abstoßenden) Kraftzentrum, in ganzes Kapitel beschäftigt sich mit der Mechanik der speziellen Relativitäts-heorie, die kanonischen Gleichungen, ihre Transformationstheorie sowie die *Iamilton-Jacobi*'sche Theorie nehmen viel breiteren Raum ein als sonst der 'all zu sein pflegt. Hier werden besonders jene Partien betont, von denen aus ie Wege zur Quantenmechanik führen, in dem Kapitel über kleine Schwin-ungen werden die freien Schwingungen eines linearen dreiatomigen Moleküls erechnet u. a. m. Den Abschluß bildet eine knappe Einführung in die Anwen-ung der Variationsprinzipe auf die Mechanik der Kontinua, in der allerdings ur einige prinzipielle Fragen diskutiert und einige einfache Beispiele (Längs-chwingungen eines Stabes, Schallschwingungen in Gasen) behandelt werden.

Von dem „klassischen" Stoff ist alles Wesentliche (z. B. Dynamik des starren Körpers) in dem Buch zu finden, so daß es trotz seines spezifischen Charakters ls in sich abgeschlossenes Lehrbuch gelten kann.

Das Buch macht den Leser mit den nötigen Rechenmethoden (Vektoren-nd Matrizenkalkül) vertraut, eine Reihe von Aufgaben beschließt jedes Kapitel; ie sind nicht als reine Übungsbeispiele gestellt, sondern als Ergänzung und Unterstreichung einzelner Partien des Textes gedacht. Nicht unterlassen sei in Hinweis auf die zahlreichen Literaturangaben, in denen jedes angeführte ehrbuch eine sehr persönlich gefaßte, aber gerade deshalb interessante Charak-erisie ung erfährt.

Alles in allem: ein sehr interessantes Buch, das jeder, der sich für mathe-natische Physik interessiert, mit Genuß und Nutzen lesen wird.

J. Radon, Wien

Iechanics. Von *St. Banach*. (Monografie Matematyczne: Band XXIV.) Mit 325 Abb., IV, 546 S. Warschau. 1951.

Das Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der im Krieg verstorbene ekannte polnische Mathematiker seinerzeit an der Universität und an der echnischen Hochschule in Lwow gehalten hat. Es beschränkt sich auf die Iechanik der Punkte und starren Körper und ist als einführendes Werk gedacht. n einem einleitenden Kapitel wird das Rechnen mit Vektoren auseinandergesetzt. s folgt in zwei Kapiteln die Mechanik des Massenpunktes. Kap. 4, welches mit Geometrie der Massen" überschrieben ist, bringt in sehr klarer Form die eometrie der Systeme von Massenpunkten. Ihre Dynamik folgt in Kap. 5.

Die nächsten drei Kapitel sind der ausführlichen Darstellung der Mechanik starrer Körper gewidmet. Besonders sei auf die sorgfältige und klare Behandlung der Kinematik starrer Körper in Kap. 7 hingewiesen. Die drei letzten Kapitel geben eine Einführung in die allgemeinen Prinzipien der Mechanik, insbesondere bringt das letzte die Variationsprinzipien.

Das Werk zeichnet sich durch große Klarheit der Sprache aus. Ganz besonders von Nutzen werden dem Lernenden die zahlreichen konkreten Beispiele sein, die immer sehr ausführlich vorgerechnet werden. Dadurch fallen viele Schwierigkeiten weg, die der Anfänger sonst meist vorfindet. Das *Banach*'scheBuch wird sicherlich vielen Studierenden das Eindringen in die Prinzipien der Mechanik außerordentlich erleichtern. *K. Prachar*, Wien

Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Von *K. Federhofer*. In drei Teilen.

II. Teil: Kinematik und Kinetik des Punktes.

113 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 105 Textabb., IV, 103 S. S 42.—, sfr. 10.—, $ 2.30, DM 9.60.

III. Teil: Kinematik und Kinetik starrer Systeme.

149 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 191 Textabb., V, 139 S. S 42., sfr. 10.—, $ 2.30, DM 9.60. Wien: Springer-Verlag. 1951.

Zweiter und dritter Teil des Werkes stellen sowohl was Inhalt wie Ausstattung betrifft, würdige Fortsetzungen des ersten Teiles dar (Mh. Math. **55**, 102). Damit hat das Werk einen Abschluß gefunden. Der zweite Teil enthält Aufgaben über die Bewegung eines einzelnen freien oder geführten Massenpunktes, während der dritte Teil Aufgaben aus der Kinematik des ebenen und räumlichen Systems und der Kinetik starrer Systeme bringt. Die Lösungen werden nicht bloß angegeben, sondern es wird gezeigt, wie man zu den Lösungen gelangt. Vielfach geschieht dies so ausführlich, daß die Bücher ein Lehrbuch ersetzen. Wenn auch die Bücher in erster Linie für Studierende geschrieben sind, für die sie sehr wertvolle Studienbehelfe darstellen, so findet auch der Fortgeschrittene darin viel Interessantes. *N. Hofreiter*, Wien

Einführung in die theoretische Gasdynamik. Von *R. Sauer*. Zweite Auflage. Mit 107 Textabb., VIII, 174 S. Berlin:Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1951. DM 16.50.

Als die erste Auflage dieses Buches erschien (1942), war das Buch besonders aktuell, da damals Luftfahrtforschung und Ballistik sehr gepflegt wurden. Daher war das Buch bald vergriffen und eine Neuauflage erwünscht. Das Buch gibt eine zusammenfassende Darstellung der theoretischen Untersuchungen über die Strömungen bei Geschwindigkeiten, die größer als die Schallgeschwindigkeit sind. Hier gelten ganz andere Gesetze als in der gewöhnlichen Aerodynamik und Hydrodynamik. Die Strömungen pflanzen sich in ein stromabwärts gelegenes Gebiet fort. Ferner treten neben den stetigen Verdünnungen und Verdichtungen auch unstetige Zustandsänderungen, die sogenannten Verdichtungsstöße auf. Mathematisch betrachtet sind die linearisierten Potentialgleichungen im Unterschallgebiet vom elliptischen, im Überschallgebiet hingegen von hyperpolischen Typus. Im Vergleich zur ersten Auflage, die in Mh. Math. Phys. **51**, 19 (1943) besprochen wurde, enthält die zweite Auflage eine Erweiterung des Charakteristikenverfahrens auf nicht wirbelfreie Überschallströmungen. Ferner werden in einem neuen Abschnitt räumliche, nicht drehsymmetrische Überschallströmungen behandelt. Das Buch enthält außerdem einige Ergänzungen

urch Berücksichtigung neuerer Arbeiten und neue Literaturangaben. Das Buch t für den angewandten Mathematiker und den theoretisch interessierten ngenieur ein sehr wertvoller Behelf, die theoretische Gasdynamik kennen zu rnen.

N. Hofreiter, Wien

he Classical Theory of Fields. Von *L. Landau* und *E. Lifschitz*. Übersetzung aus em Russischen von M. *Hammermesh*, IX, 354 S. Cambridge, Maß.: Addison-Vesley Press Inc. 1951. $ 7.50.

Das Buch der bekannten Physiker ist der Theorie der Elektrodynamik im akuum, der Punktladungen und der Theorie des Gravitationsfeldes (allgemeine elativitätstheorie) gewidmet. Bei der Herleitung der *Maxwell-Lorentz*'schen leichungen gehen die Verfasser in der einzig sachgemäßen Weise, abweichend on den üblichen Darstellungen, von der speziellen Relativitätstheorie aus. s sei bemerkt, daß *G. D. Birkhoff* in seinem Werk „Relativity and modern hysics" Cambridge 1923, denselben Ausgangspunkt gewählt hat. Die Theorie ird ausführlich und weitgehend entwickelt. Die bekannten Schwierigkeiten er Quantenelektrodynamik machen ein neues Durchdenken der klassischen heorie erforderlich, daher ist diese Darstellung zu begrüßen. Von dem reichen nhalt möchte ich nur die interessanten Untersuchungen russischer Physiker, elche hier zugänglich gemacht werden, über die Strahlung eines Teilchens, dessen eschwindigkeit nahe an der des Lichtes ist, hervorheben. Die Darstellung t sehr klar. Dasselbe gilt von den Kapiteln über die allgemeine Relativitäts-heorie. Interessant ist, daß die Verfasser den kosmologischen Term ablehnen.

Es liegt hier ein sehr interessantes originelles, gut lesbares Werk vor, dessen ektüre nur empfohlen werden kann.

E. Hlawka, Wien

he Preparation of Programs for an Electronic Digital Computer. Von *M. V. Wilkes, D. J. Wheeler, St. Gill*. XIV, 170 S. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press. 1951. $ 5.—.

Die Elektronenrechenmaschinen führen bei einem Schritt nur eine der vier rundrechnungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division us. Um ein schwierigeres mathematisches Problem, z. B. die Integration einer ifferentialgleichung, zu bearbeiten, ist es nötig, dieses Problem in eine Anzahl on solchen Schritten zu zerlegen. Die Reihenfolge, in welcher diese aufeinander-lgen, wird durch sogenannte Befehle eingehalten, die auf einem Papierstreifen ufgeschrieben sind und der Reihe nach photoelektrisch abgelesen werden. as Buch soll nun demjenigen, der mit der Maschine arbeitet, zeigen, wie er am esten ein vorgegebenes Problem auf diese Art für die Maschine „verdaulich" iacht. Für gewisse Probleme, die oft auftreten, wird man diese Zerlegung ein ir alle Mal durchführen und aufschreiben. So entsteht das, was die Verff. eine subroutine" nennen. Nachdem einleitend schematisch der Aufbau der Maschine DSAC (Electronic Delay Storage Automatic Calculator) beschrieben wird, ird genau und an zahlreichen Beispielen die Arbeit mit der Maschine geschildert. uch die Behebung von Fehlern, die an der Maschine auftreten können, wird esprochen. In Teil 2 findet sich eine große Anzahl der oben genannten ubroutines vollständig ausgearbeitet.

Das sehr reichhaltige Buch wird nicht nur demjenigen von überaus großem utzen sein, der mit einer elektronischen Rechenmaschine zu tun hat. Es ist uch jedem zu empfehlen, der sich für das Arbeiten mit diesen Maschinen in-eressiert.

K. Prachar, Wien

Elektromaschinen. Lehrbuch für Fachschulen, Technische Hochschulen und Universitäten. Von *K. Seidl.* Band II. Mit 186 Abb., XIII, 184 S. Wien: F. Deuticke. 1951. S 80.—.

Der nunmehr erschienene zweite und letzte Band dieses Lehrbuches behandelt hauptsächlich die Synchronmaschinen, die Gleichstrommaschinen, sowie die Wechselstrom-Kommutatormaschinen. Außerdem wird eine größere Anzahl von Spezialmaschinen sowie von Kaskadenschaltungen beschrieben, die für Sonderzwecke von Bedeutung sind. Die Darstellung zeichnet sich wieder durch übersichtliche Anordnung des Stoffes und der Formeln, sowie durch klare Zeichnungen aus. Leider läßt jedoch auch bei diesem Band die sprachliche Formulierung des Textes viel zu wünschen übrig. *R. Herzog*, Wien

Initiation à l'étude du ciel. Von *P. Pasquier.* 50 S. Paris: Vuibert. 1951.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, dem Laien die Grundtatsachen der Astronomie zu vermitteln und ihm eine Orientierung am gestirnten Himmel zu ermöglichen. Er erläutert zuerst die wichtigsten Begriffe der sphärischen Astronomie, wie scheinbare tägliche Bewegung des Sternhimmels, Sterntag, Äquatorialkoordinaten, Ekliptik. Dann spricht er über Anzahl und Helligkeit der Sterne, über ihre Entfernungen von der Erde und ihre Abmessungen. Es folgen kurze Bemerkungen über mehrfache Sterne, veränderliche Sterne, Milchstraßensystem, Sternhaufen und extragalaktische Nebel.

Dann kommt die Anfertigung und Handhabung der Sternkarten. Das Buch enthält zwei Orientierungstafeln, die eine für Sterne mit kleiner positiver oder negativer Deklination, die andere für die zum Nordpol gehörigen Zirkumpolarsterne. Die Übersichtstafeln ermöglichen die Entscheidung, wann einzelne Sternbilder an gewissen Tagen beobachtbar sind und sie weisen auf die Detailskizzen hin.

In der ganzen Schrift erkennt man das Streben des Autors nach Einfachheit und Klarheit. Das kleine, typographisch hübsch ausgestattete Büchlein kann als populärwissenschaftlicher Leitfaden empfohlen w rden.

J. F. Lewandowski, Wien

Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress in Montreal 1945. 367 S. Toronto: The University of Toronto Press. 1946. $ 3.25.

Allem Anschein nach war der Kongreß äußerst sorgfältig vorbereitet worden. Dank zahlreicher finanzieller Zuwendungen konnten größere gesellschaftliche Veranstaltungen geboten werden. Der Kongreß gab so recht Gelegenheit zu wissenschaftlichem Gedankenaustausch und persönlicher Fühlungnahme und dürfte zur Zufriedenheit aller Teilnehmer verlaufen sein. Es haben ca. 300 Mathematiker aus Canada, England und USA. teilgenommen. In den Besprechungen über verschiedene, die Mathematiker interessierende Fragen wurden zahlreiche Resolutionen verfaßt, so die Gründung einer Zeitschrift (Canadian Journal of Mathematics), die sich seither zu einer angesehenen wissenschaftlichen Zeitschrift entwickelt hat. Viele Besprechungen galten pädagogischen Fragen. Interessant waren die Diskussionen über mathematische Statistik, einer an Bedeutung immer mehr zunehmenden Disziplin. Daneben wurden mehrere Vorträge über Themen aus verschiedenen Zweigen der Mathematik gehalten, die in diesem Buch ziemlich ausführlich wiedergegeben werden (Moderne Algebra, Liesche Gruppen, Geometrie der Zahlen, partielle Differentialgleichungen, konforme Abbildung, Grundlagen der Geometrie, reguläre Körper, Topologie usw.)

N. Hofreiter, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie

Von Dr. **Robert König**, Professor an der Universität München, und Dr. **Karl H. Weise**, Professor an der Universität Kiel.

In zwei Bänden.

Erster Band:

Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen

Mit 109 zum Teil farbigen Abbildungen. XVIII, 522 Seiten. 1951.
DM 46.—; Ganzleinen DM 49.60

Inhaltsübersicht: Das Sphäroid. Berechnung der Krümmungsgrößen, des Meridian- und Parallelkreisbogens, der Oberfläche. — Die drei komplexen Grund-Flächenvariablen A = M, B, $\lceil$ für eine Drehfläche, insbesondere für Sphäroid und Kugel. — Zwischenstück: Konforme Abbildung zweier Ebenen. — Der geometrische Zusammenhang zwischen A, B, $\lceil$. — Analytische Darstellungsmittel (Reihen) für den Zusammenhang zwischen A, B, $\lceil$ und ihren Exponentialfunktionen. Zwischenstück: Konforme Abbildungen des Sphäroids auf die Kugel durch $\mu = M$. — Die konforme Abbildung des Sphäroids auf Ebene, Kugel und Sphäroid. — Die stereographischen Abbildungen, Kegelabbildungen und die allgemeine Bogenabbildung des Sphäroids. — Die Transformationen der isothermen Koordinatensysteme. — Verschiedene Projektionen des Erdsphäroids auf Ebene, Kugel und Drehellipsoid. — Hilfsmittel aus der Analysis. — Schriftenverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Das vorliegende Werk behandelt denjenigen Teil der Geodäsie, in dem die Erdfigur als schwach abgeplattetes Drehellipsoid mit bekannten Dimensionen, kurz Sphäroid genannt, angenommen wird. Im Gegensatz zur „Niederen Geodäsie", wo Teile der Erdoberfläche durch Ebene oder Kugel angenähert werden, spricht man hier von der „Höheren Geodäsie". Ihre Gegenstände sind — in mathematischer Stufenfolge — die Lagebeschreibung der Punkte auf dem Sphäroid durch Koordinaten, die geodätische Linie, das geodätische Dreieck und daraus gebildete Ketten und Netze.

Der erste Teil enthält in einheitlich organischem Aufbau die konforme Abbildung des Sphäroids auf Kugel und Ebene und damit die Gewinnung ebener, rechtwinkliger, konformer Punkt-Koordinaten. Besonderes Gewicht wird dabei auf das Studium der Sphäroidabbildungen im großen gelegt, da nur hierdurch vertiefte Einblicke in die Struktur der Abbildungsfunktionen und ihre analytischen Darstellungsmittel gewonnen werden können.

Dieser Teil erscheint als erster Band des Werkes mit dem Untertitel: „Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen" und liefert damit auch der höheren Kartographie die mathematischen Unterlagen. Der zweite Band mit dem Untertitel: „Grundprobleme der höheren Geodäsie" ist in Vorbereitung.

Zentralblatt für Mathematik
und ihre Grenzgebiete

Herausgegeben von *K. Bechert*, Mainz, *W. Blaschke*, Hamburg, *E. Bompiani*, Rom, *Ch. Ehresmann*, Strasbourg, *R. Grammel*, Stuttgart, *H. Hasse*, Hamburg, *F. Hund*, Frankfurt/M., *H. Kienle*, Heidelberg, *K. Knopp*, Tübingen, *R. Nevanlinna*, Helsinki, *J. Radon*, Wien, *W. Saxer*, Zürich, *E. Schmidt*, Berlin, *F. Severi*, Rom, *B. v. Sz. Nagy*, Szeged, *E. Ullrich*, Gießen, *E. M. Wright*, Aberdeen. Begründet von *O. Neugebauer*. Fortgeführt von *E. Ullrich* und *H. Geppert*. Gegenwärtig geleitet von *H. L. Schmid*, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin. — Forschungsinstitut für Mathematik, Berlin. Erscheint in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Preis des Bandes DM 68.—. Maximalpreis für 1952 (4 Bände) DM 272.—.

Zu beziehen durch:
MINERVA, Wissenschaftliche Buchhandlung Ges. m. b. H., Wien I., Mölkerbastei 5